Circunferencias y Círculos

Notas del Autor

El presente trabajo, junto con compilar y deducir parte de los contenidos -ya existentes por lo demás, desde la antigua Grecia- presenta en su amplia mayoría ejercicios elaborados personalmente. Algunos de los cuales se pueden hallar -con alguna variación numérica, dentro de los textos indicados en la bibliografía.
Como el estudiante puede sospechar, la dificultad para todo profesor no está en la elaboración mental de los mismos, sino más bien en el tiempo invertido para llegar a la elaboración de un trabajo digital al cual podremos consultar. Y sumando en tal dirección, espero sea un aporte para alumnos, profesores y en cierta medida, para quienes se preparan en alguna prueba de admisión universitaria.

Es así como hoy me toca poder invitarlos a los temas o contenidos de Circunferencias y Círculos. Figuras y formas que desde de la antigüedad han inspirado interpretaciones o significados cercanos a la belleza o a la perfección más allá de la geometría. El tenerlas presente me han reportado y reportan mucho disfrute personal, cada vez que me hallo con ellas. Espero que a uds. también, desde la perspectiva de sus contenidos y variados ejercicios.

Guillermo Corbacho Castro.
Profesor de Matemáticas y Física y Licenciado en Educación.
Titulado y graduado de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

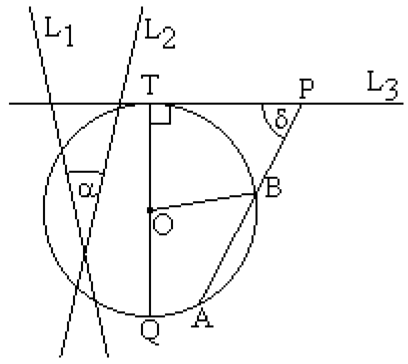
ÍNDICE

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

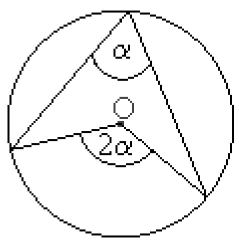
I. Elementos de la circunferencia:

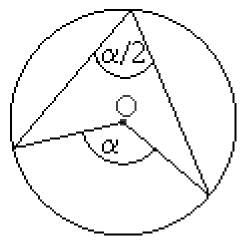
- O es centro de la ⊗;
- $\overline{OT}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OB}$ son radios de la ⊗;
- $\overline{AB}$ cuerda de la ⊗;
- $\overline{QT}$ diámetro de la ⊗;
- L_1 y L_2 son rectas secantes a la ⊗;
- L_3 es tangente a la ⊗;
- α es ángulo interior de la ⊗;
- δ es ángulo exterior a la ⊗;



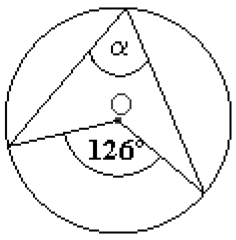
II. Propiedades

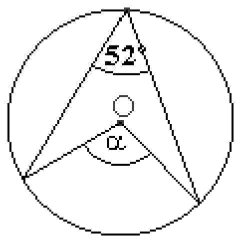
1. **El *ángulo del centro* mide *el doble* que el ángulo *inscrito*.**
   O bien; **el ángulo *inscrito mide la mitad* que el *ángulo del centro*.**

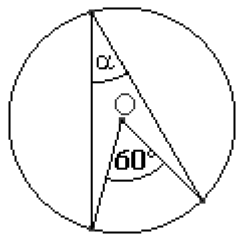




Ejemplos: Para hallar el valor incógnito, usar la primera representación de la propiedad indicada será suficiente: "el ángulo d*el centro mide el doble* que su ángulo inscrito".





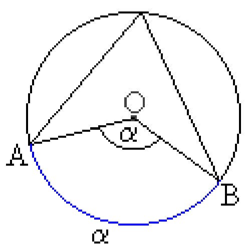


Solución:
$126^{\circ} = 2\alpha \qquad / \bullet \tfrac{1}{2}$
$63^{\circ} = \alpha$

Solución:
$\alpha = 2 \bullet 52^{\circ}$
$= 104^{\circ}$

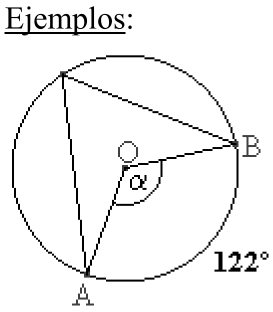
Solución:
$60^{\circ} = 2\alpha \qquad / \bullet \tfrac{1}{2}$
$30^{\circ} = \alpha$

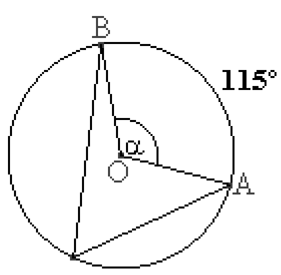
2. ***El ángulo del centro* mide lo *mismo* que el *arco* de circunferencia que subtiende.**
   Tal como se ilustra en la figura.

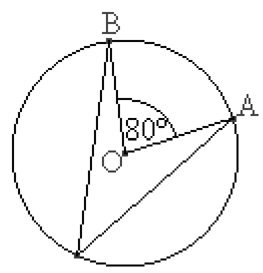


$\overset{\frown}{AB} = \alpha = \sphericalangle AOB$

Ejemplos:

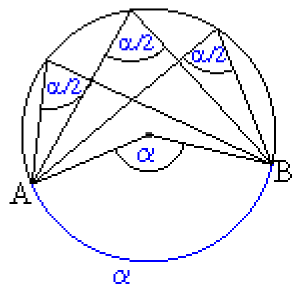




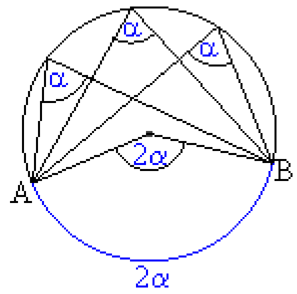


$\alpha = \overset{\frown}{AB} = 122^{\circ}$ $\qquad$ $\alpha = 115^{\circ}$ $\qquad$ $\overset{\frown}{AB} = 80^{\circ}$

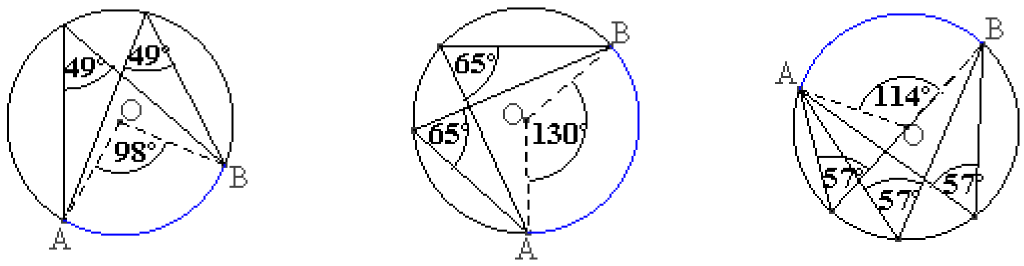
3. ***Los ángulos inscritos que subtienden el mismo ángulo del centro*** *-o arco de circunferencia****, son iguales entre sí y miden la mitad que el ángulo del centro*** –así como del arco que subtiende.



O bien, ***el ángulo del centro mide el doble que todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco que el***, cuya medida de este último, es también el doble que ellos.

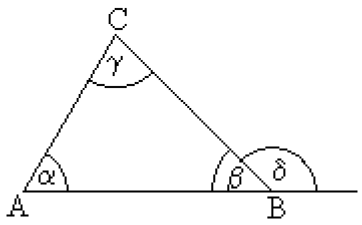


Ejemplos:



Recordatorios:
En ejercicios de esta unidad, aparecen en ocasiones triángulos inscritos (adentro) de una circunferencia. Por lo tanto es pertinente recordar de los triángulos que:

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180º.
- Un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a el.



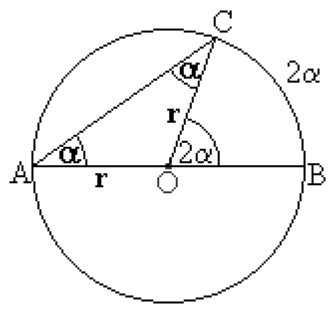
$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$
$$\alpha+\gamma=\delta$$

- Dos ángulos adyacentes suplementarios suman 180º. En la figura anterior: $\beta+\delta=180^\circ$

En una circunferencia debemos tener que:

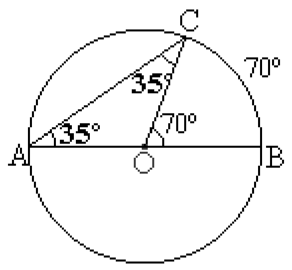
- Toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, es diámetro de ella –la dimidia en dos partes iguales-.

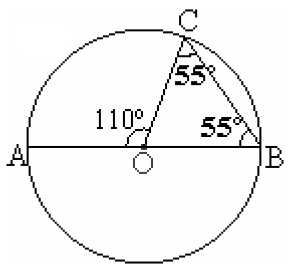
- Todo triángulo dentro de una circunferencia que tengas dos lados coincidentes con un radio, es isósceles. Y los ángulos interiores -del mismo triángulo-, opuestos a dichos lados, son de igual medida entre sí.
  En la circunferencia de la izquierda, r designa su radio. $\overline{AB}$ es una cuerda que pasa por su centro, por lo tanto es también un diámetro.

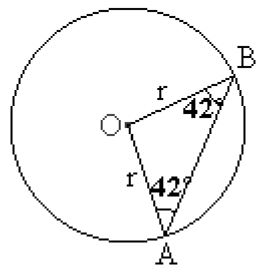


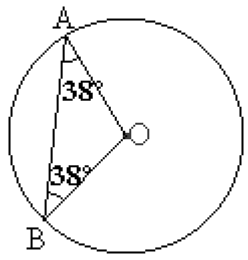
  El triángulo AOC es isósceles, pues $AO=OC=r$.
  Y sus ángulos interiores, -opuestos a dichos lados- y de igual medida entre sí, están indicados por α.

Ejemplos:





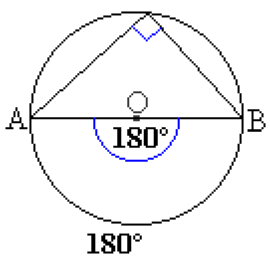




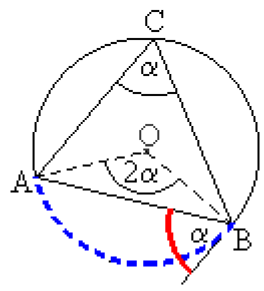
Observe que en las primeras figuras hemos indicado también ***el ángulo del centro***. ***El cuál tiene siempre la misma orientación que su respectivo ángulo inscrito.*** Así, en la primera figura **un** ángulo inscrito de 35º se abre hacia la *derecha*, por lo tanto **su respectivo** ángulo del centro –que mide el doble, 70º-, *también* se abre hacia la *derecha*. Hacia donde se halla el arco respectivo.
En la segunda figura, un ángulo inscrito se abre hacia la izquierda y su respectivo ángulo del centro también.
Pero no siempre hemos indicado el ángulo del centro y su arco. Las dos últimas figuras se concentran únicamente en lo que estamos indicando al inicial este punto: que si dos lados del triángulo coinciden con los radios, entonces es un triángulo isósceles. Esto significa que por tener dos lados de igual medida, los ángulos opuestos a dichos lados -llamados ángulos basales-, también tienen igual medida al interior del mismo triángulo.

- Otro punto que destacar relativo a ángulos al interior de una circunferencia es que, un ángulo completo es aquel que subtiende un arco que coincide con la propia circunferencia y que por lo tanto, mide 360º.

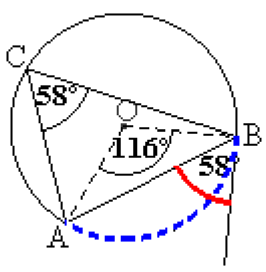
4. Debido a lo anterior, **un ángulo del centro que subtiende un arco de media circunferencia, mide 180º**. Y si dicho ángulo del centro tiene un ángulo inscrito, este mide, por lo visto anteriormente, su mitad, es decir, 90º.

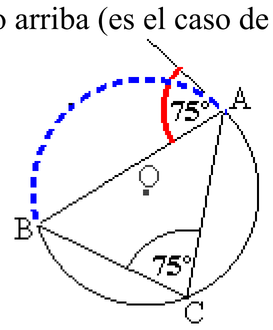


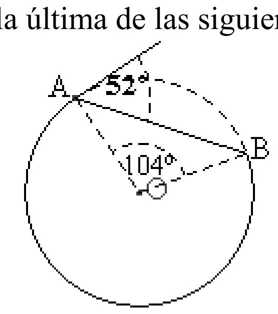
5. **Un *ángulo semi inscrito*** -en la figura de la derecha marcado con rojo, tiene como uno de sus lados una cuerda de la circunferencia y por otro, un segmento externo y tangente, comparte la misma propiedad que un ángulo inscrito. Es decir, ***mide la mitad que el ángulo del centro y lo mismo que el ángulo inscrito* con los cuales subtienda el mismo arco.** Tal como lo ilustra la figura.

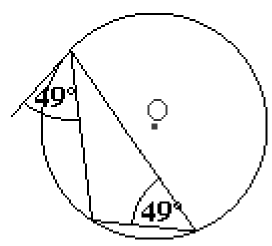


Ejemplos: Lo usual es que no nos encontremos con los arcos y ángulos resaltados o diferenciados como arriba (es el caso de la última de las siguientes figuras.)





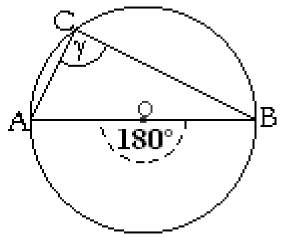




Ángulos en la Circunferencia
Listado Nº1: Ejercicios (Resueltos)
Ángulos inscritos, del centro y semi inscritos.

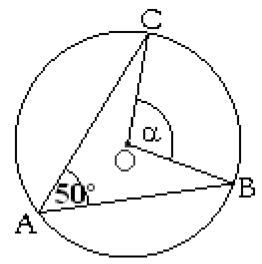
<u>Ejercicios</u>: En cada circunferencia, O es centro y $\overline{AB}$ es cuerda.

1. $\overline{AB}$ es diámetro de la ⊗. $\gamma = ?$



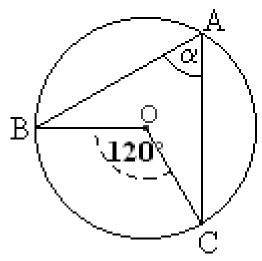
<u>Solución</u>:
γ es un ∢ inscrito y mide la mitad que el ∢ del centro con el cual subtiende el mismo arco $\overset{\frown}{AB}$ de ⊗.
Es decir, $\gamma = \dfrac{180°}{2} = 90°$

2. $\alpha = ?$



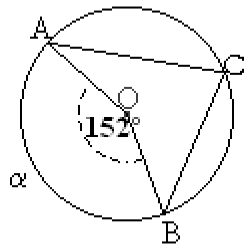
<u>Solución</u>:
α es un ∢ del centro y por lo tanto, mide el doble que el ∢ inscrito que subtiende el mismo arco de ⊗ que el.
$\alpha = 2 \bullet 50° = 100°$

3. $\alpha = ?$



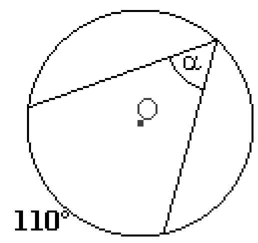
<u>Solución</u>:
Los ángulos inscritos y del centro subtienden el mismo arco $\overset{\frown}{BC}$. En tales casos, el ángulo del inscrito mide SIEMPRE la mitad que el ∢ del centro.
$\alpha = \dfrac{120°}{2} = 60°$

4. $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



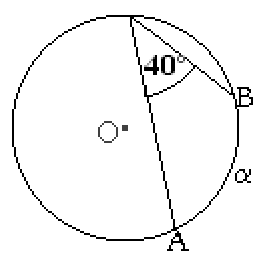
<u>Solución</u>:
Todo arco de ⊗ SIEMPRE mide lo mismo que el ∢ del centro que lo subtiende. Por lo tanto:
$\overset{\frown}{AB} = 160°$ O bien: $\alpha = 152°$

5. $\alpha = ?$



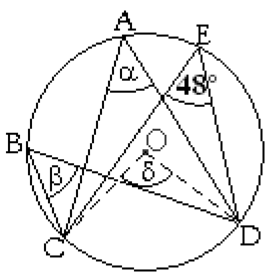
<u>Solución</u>:
α es un ángulo inscrito, por lo tanto, mide la mitad que el arco que subtiende:
$\alpha = \dfrac{110°}{2} = 55°$

6. $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



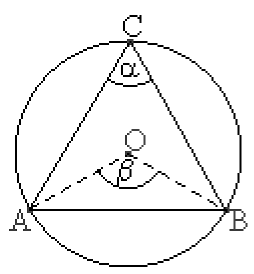
<u>Solución</u>:
Ahora α es un arco y al igual que un ángulo del centro, mide el doble que el ángulo inscrito:
$\alpha = 2 \bullet 40° = 80°$.

7. $\alpha = ?$, $\beta = ?$, $\delta = ?$



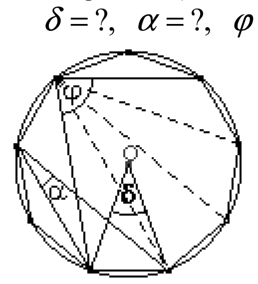
<u>Solución</u>:
α es un ángulo del centro y por lo tanto, mide el doble que el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco de ⊗, es decir:
δ = 2•42º =84º.
α y β son ∢s inscritos que subtienden el mismo arco que el ∢ de 48º. Por lo tanto, miden lo mismo que este.
Es decir: α = β = 48º.

8. El triángulo ABC es equilátero. $\alpha = ?$, $\beta = ?$



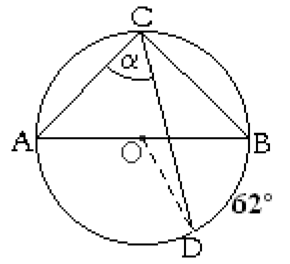
<u>Solución</u>:
Cada vértice del triángulo equilátero divide los 360º de la ⊗ en tres arcos y ángulos del centro congruentes (de igual medida).
Es decir, $\beta = \dfrac{360°}{3} = 120°$.
Mientras, $\alpha = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

9. Se tiene un nonágono regular (polígono de nueve lados congruentes) inscrito en la ⊗. $\delta = ?$, $\alpha = ?$, $\varphi = ?$

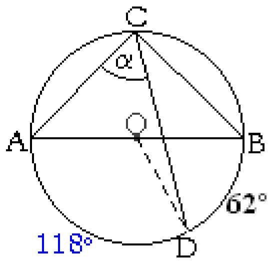


<u>Solución</u>:
Cada vértice del polígono equilátero divide los 360º de la ⊗ en 9 arcos y ángulos del centro congruentes (de igual medida).
Es decir, el ángulo del centro mide: $\delta = 360°/9 = 40°$.
Cada ángulo inscrito mide:
$\alpha = \delta/2 = 40°/2 = 20°$.
y φ mide cuatro veces α:
$\varphi = 4\alpha = 4 \bullet 20° = 80°$.

10. $\overline{AB}$ es diámetro. $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



Solución:
La figura se puede completar a:

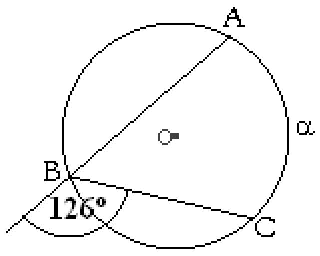


$\overset{\frown}{AD}$ + $\overset{\frown}{DB}$ = 180° (forman media circunferencia)

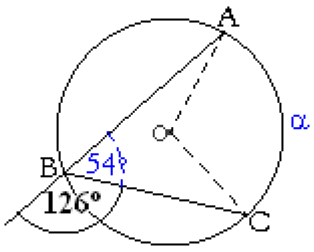
De donde: $\overset{\frown}{AD} = 180° - 62° = 118°$.
Y como α es un ángulo inscrito, del arco $\overset{\frown}{AD}$ que subtiende.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{118°}{2} = 59°.$$

11. $\delta = ?$



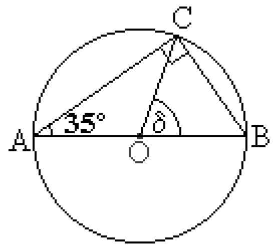
Solución:
La figura se puede completar a:



Esto debido a que se tiene ángulos adyacentes suplementarios (que sumados dan 180°).

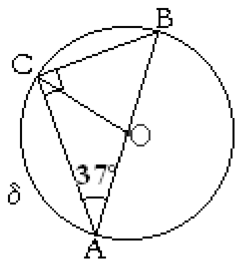
Y sabemos que $\alpha = \overset{\frown}{BC}$ mide el doble que el ∢ inscrito que lo subtiende:
$\alpha = 2 \bullet 54° = 108°$.

12. $\alpha = ?$

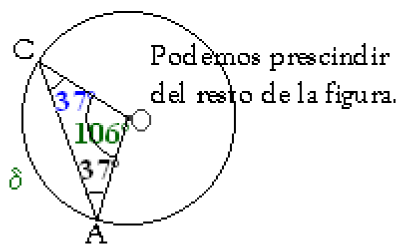


Solución:
Por ser δ un ángulo del centro que subtiende el mismo arco $\overset{\frown}{BC}$ que el ángulo inscrito ∢CAB, tenemos:
si ∢CAB = 35°
$\Rightarrow \delta = 2∢CAB = 2 \bullet 35° = 70°$.

13. $\overset{\frown}{AC} = \delta = ?$

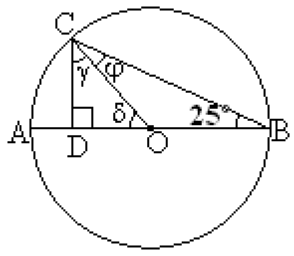


Solución:
Como $\overline{OA} = \overline{OC} = r$, los ∢s que se oponen a tales lados son iguales (∢s basales) y miden 37°. En este caso:
∢ACB = ∢AOC = 37°.
Y el arco α es igual al ángulo del centro del ΔAOC. Este último se puede deducir mediante la suma de los ∢s interiores en todo Δ (iguales a 180°).

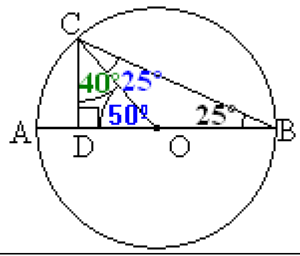


∢AOC = 180° – 74° = 106° = δ.

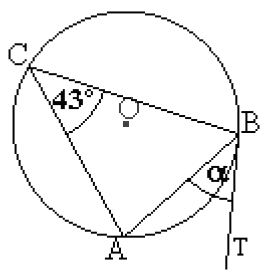
14. $\varphi = ?, \quad \gamma = ?, \quad \delta = ?$



Solución:
$\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios ⇒ sus ∢s opuestos son iguales.
∴φ = 25° [∢s basales en un Δ isósceles).
Un ∢ del centro mide el doble que el ∢inscr. con el cual subtiende el mimo arco. Así, δ = 50°.
Y dado que en todo Δ:
Σ∢ int.=180°. En el ΔDOC:
γ = 180° – (90+50)° = 40°

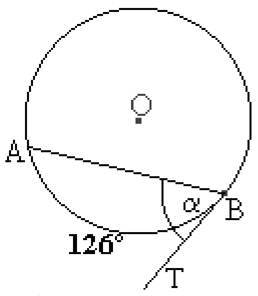


15. $\overline{BT} \perp \otimes$. $\alpha = ?$



Solución:
Un ∢ semi inscrito α mide lo mismo que un ∢ inscrito con el cual subtienda el mismo arco de ⊗. En este caso, el arco en común es $\overset{\frown}{AB}$.
Es decir, α = ∢ACB = 43°.

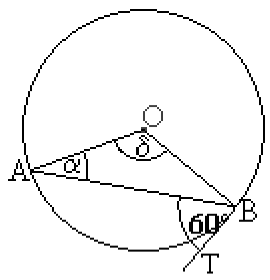
16. $\overline{\mathrm{BT}} \perp \otimes$. $\alpha = ?$



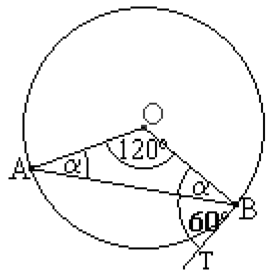
Solución:
Un ∢ semi–inscrito (al igual que un ∢ inscrito) *siempre* mide la mitad que el arco que subtiende.
En este caso, α es ∢ semi-inscrito en la ⊗ y subtiende al arco AB.
Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{\widehat{\mathrm{AB}}}{2} = \frac{126^\circ}{2} = 63^\circ.$$

17. $\overline{\mathrm{BT}} \perp \otimes . \delta = ?, \quad \alpha = ?$

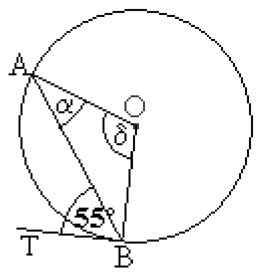


Solución:
El triángulo AOB es isósceles, $\Rightarrow \alpha =$ ∢OBA por ser ∢s basales, (∢*s* opuestos a lados de igual medida, el radio r, del Δ).
Y el ángulo del centro mide *siempre* el doble que el ∢ semi–inscrito con el cual subtiende el mismo arco.
Así, la figura se puede completar a:



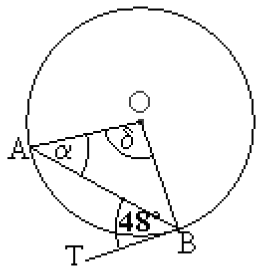
Hallaremos α por la suma de los ángulos interiores.
Así, lo que falta son 60°, (que se reparten en los dos ángulos α).
Esto es,
$2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

18. $\overline{\mathrm{BT}} \perp \otimes . \delta = ?, \quad \alpha = ?$



Solución: Análogo al anterior.
Resp.: α = 35°

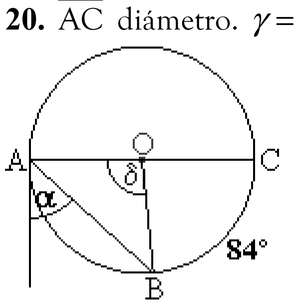
19. $\overline{\mathrm{BT}} \perp \otimes . \delta = ?, \quad \alpha = ?$
¿Y qué se puede concluir de los ejercicios 17, 18 y 19?



Solución: Ídem a los anteriores.
Resp.: α = 42°

Conclusión(es):
- El ángulo basal y el semi inscrito son complementarios suman 90°.
- La tangente a la circunferencia es perpendicular a su radio en el punto de tangencia.

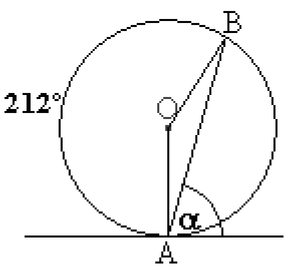
20. $\overline{\mathrm{AC}}$ diámetro. $\gamma = ?, \quad \alpha = ?$



Solución:
$\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ forman una media circunferencia.
$\widehat{AB} + \widehat{BC} = 180^\circ$
$\widehat{AB} + 84^\circ = 180^\circ$
$\Rightarrow \widehat{AB} = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$

Y como un ángulo del centro mide siempre lo mismo que el arco que subtiende: δ = 96°.

21. $\widehat{\mathrm{BA}} = 212^\circ$. $\alpha = ?$

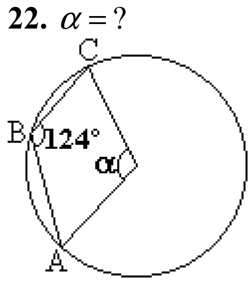


Solución:
Por ser α un ángulo semiinscrito, mide la mitad que su ángulo del centro, con el cuál subtiende la cuerda $\widehat{\mathrm{AB}}$

$$\alpha = \frac{\sphericalangle \mathrm{AOB}}{2} = \frac{\widehat{\mathrm{AB}}}{2}$$

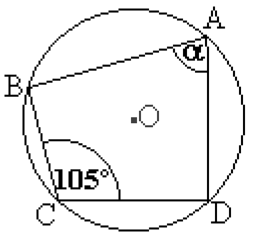
Todo se reduce a hallar el $\widehat{\mathrm{AB}}$ y dividirlo por dos.
$\widehat{\mathrm{AB}} + \widehat{\mathrm{BA}} = 360^\circ$
$\widehat{\mathrm{AB}} + 212^\circ = 360^\circ$
$\Rightarrow \widehat{\mathrm{AB}} = 148^\circ \Rightarrow \alpha = 74^\circ$.

22. $\alpha = ?$



Solución:
El ∢CBA = 124° es *inscrito*, por lo tanto el arco $\widehat{AC}$ que subtiende hacia la derecha –está de más decirlo-, mide SU DOBLE.
$\widehat{\mathrm{AC}} = 2 \bullet 124^\circ = 248^\circ$
Luego,
$\widehat{\mathrm{AC}} + \widehat{\mathrm{CA}} = 360^\circ$
$248^\circ + \widehat{\mathrm{CA}} = 360^\circ$
$\Rightarrow \widehat{\mathrm{CA}} = \alpha = 112^\circ$.
Pues α es ángulo *del centro* y subtiende al arco $\widehat{\mathrm{CA}}$.

23. $\alpha = ?$



Solución:

Como 105º y α son ángulos inscritos, sus arcos -además de completar una circunferencia- miden el doble que ellos.

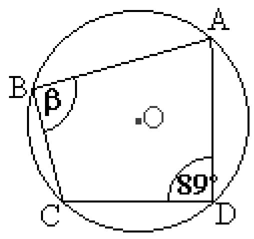
$\widehat{BD} + \widehat{DB} = 360^{\circ}$

$2\alpha + 210^{\circ} = 360^{\circ}$

$\Rightarrow 2\alpha = 150^{\circ}$

$\alpha = 75^{\circ}$

24. $\beta = ?$

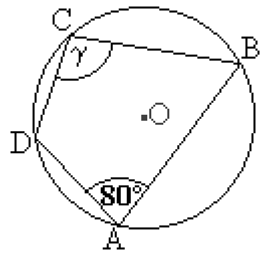


Resp.:

β = 91º

25. $\gamma = ?$

¿Qué se puede concluir de este ejercicio y del 23 y 24? ¿Y cuál es la diferencia con el ejercicio 22?



Resp.:

γ = 100º.

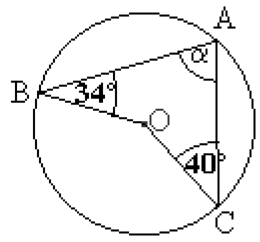
Conclusiones:

Se puede concluir que:

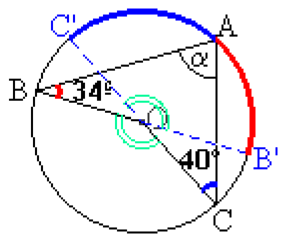
- Los ángulos opuestos en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia suman 180º (son suplementarios).

- La diferencia es que el cuadrilátero del ejerc. 22 tiene uno de sus vértices en el centro de la circunferencia. Por ello no satisface la conclusión anterior.

26. $\alpha = ?$



Solución:



α es ángulo inscrito, por tanto

$$\alpha = \frac{\sphericalangle BOC}{2}$$

$$= \frac{\sphericalangle B'OC'}{2} \quad (\sphericalangle s \text{ op. vértice})$$

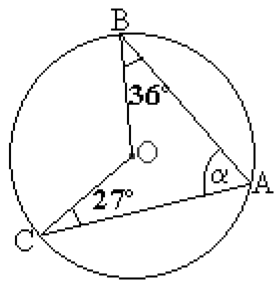
$$= \frac{\left(\widehat{B'A} + \widehat{AC'}\right)}{2}$$

$$= \frac{(2 \bullet 34^{\circ} + 2 \bullet 40^{\circ})}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(34^{\circ} + 40^{\circ})}{\cancel{2}}$$

$$= 74^{\circ}$$

27. $\alpha = ?$



¿Qué se puede concluir de este ejercicio y del anterior (ejercicio 26)?

Resp.:

$\alpha = 63^{\circ}$

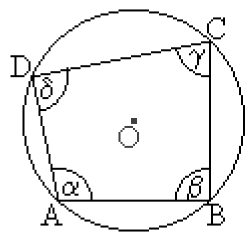
Conclusión:

Para cuadriláteros con tres vértices en la ⊗ y el otro en el centro de ella, uno de sus ángulos inscritos es igual a la suma de los otros dos ángulos inscritos.

Volviendo con puntos de contenidos,…

6. Cuadrilátero inscriptible o inscrito en una circunferencia.

Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices están en ella.



Hay que notar la diferencia entre circunferencia y círculo.

Una Circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes o que tienen una misma distancia respecto de otro, llamado este último, centro.

Mientras que un círculo es el espacio al interior de la circunferencia.

El cuadrilátero ABCD de arriba está inscrito en la circunferencia de centro O.

Y los ejercicios 23, 24 y 25 hacen referencia a que *en un cuadrilátero inscrito* a una ⊙, *los ángulos opuestos son suplementarios -suman 180º.*

Así, en la figura del recuadro:

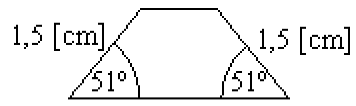
$$\alpha + \gamma = 180º$$

y $$\beta + \delta = 180º$$

7. Trapecio Isósceles inscrito en una circunferencia.

Un trapecio es una figura de cuatro lados (cuadrilátero) con un par de lados opuestos paralelos y el otro par de lados opuestos no paralelos.

Y al igual que en un triángulo, *a ángulos contiguos de igual medida entre sí se oponen también lados de igual medida entre sí* (congruentes).

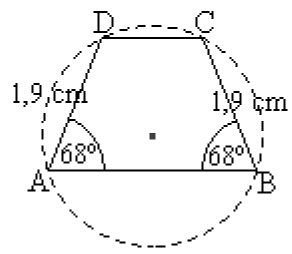


Un ejemplo de ello es el siguiente trapecio.

Sin embargo, lo más común es que la mayoría de los trapecios que se dibujan en la práctica, no tengan dos ángulos y lados opuestos que sean de igual medida o congruentes.

Pero esto SIEMPRE ocurre si el trapecio dibujado está inscrito en una circunferencia.

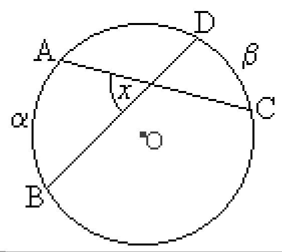
Un ejemplo es la figura de la derecha.



8. Ángulo interior a una circunferencia.

Un ángulo interior a una circunferencia es aquel ángulo formado por dos cuerdas que se cortan, como se muestra en la figura.

Y su medida se obtiene mediante la fórmula:



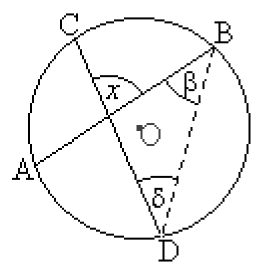
$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

O bien,

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

9. Ángulo exterior a un triángulo.

Podemos hallar un ángulo interior a una circunferencia y a la vez, exterior a un triángulo inscrito.



Su medida es igual a la suma de los ángulos interiores del Δ, no contiguos a el.

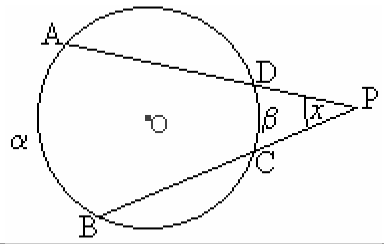
En la figura**:**

$$x = \beta + \delta$$

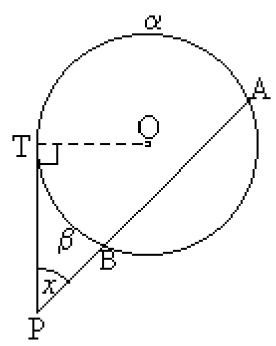
10. Ángulo exterior a una circunferencia formado por dos secantes.

La medida de un ángulo exterior x, formado por dos secantes $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$, se obtiene mediante la fórmula:

$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} \qquad \text{O bien:} \quad x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



11. Ángulo exterior a la circunferencia con al menos uno de sus lados como tangente.



La obtención del ángulo exterior no difiere del caso anterior:

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Nota aparte:

La tangente es siempre perpendicular al radio y al diámetro de la ⊗.

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Ángulos en la Circunferencia

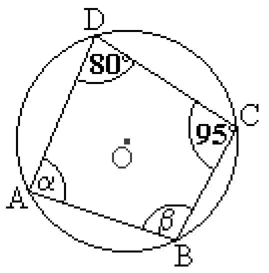
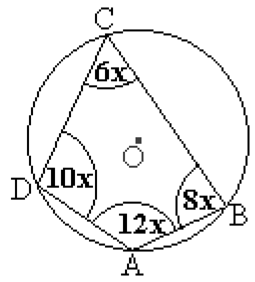
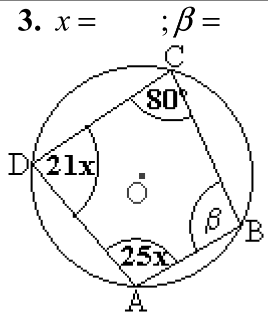
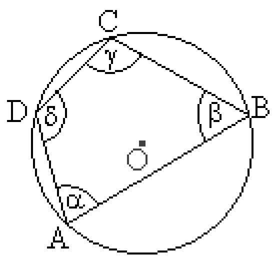
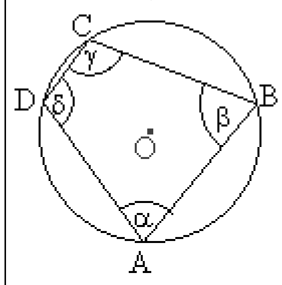
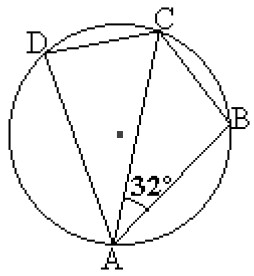
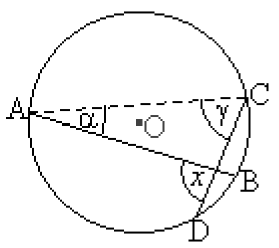
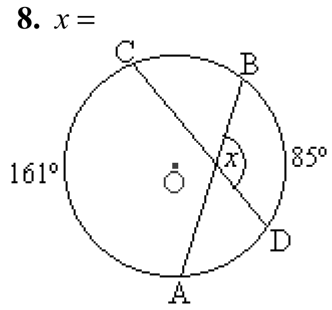
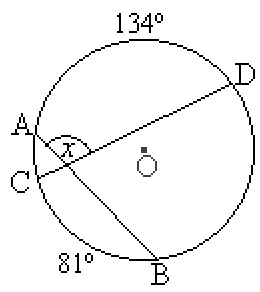
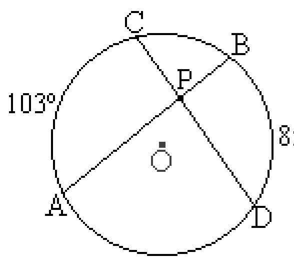
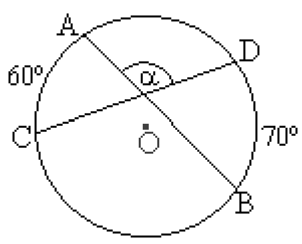
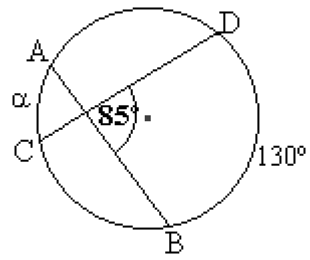
<u>Listado Nº 2 de Ejercicios (Propuestos)</u>

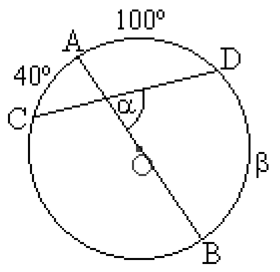
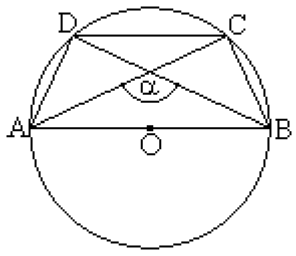
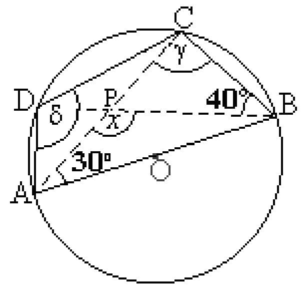
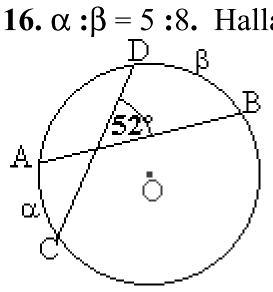
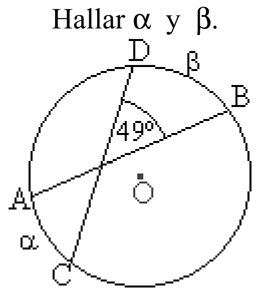
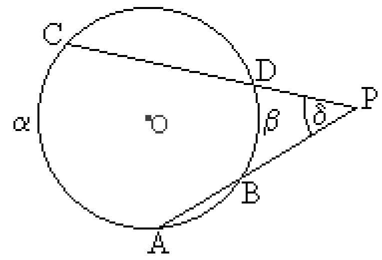
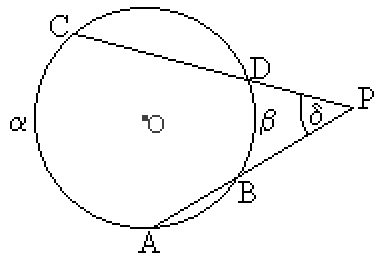
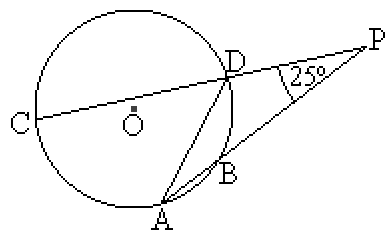
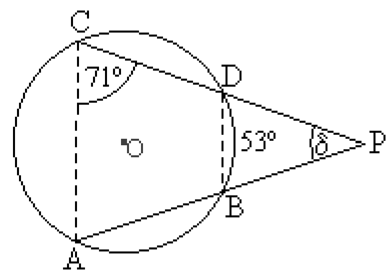
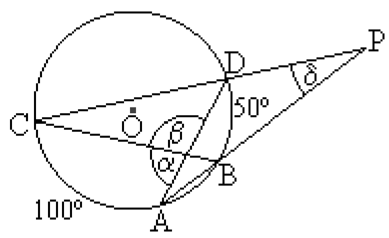
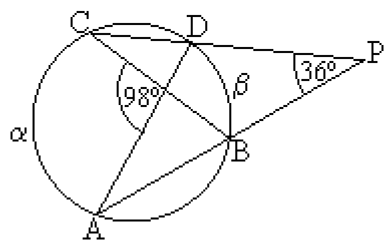
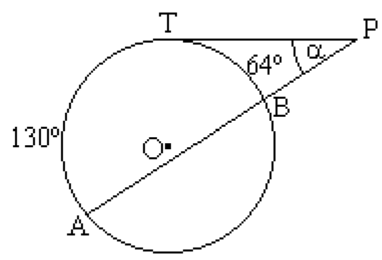
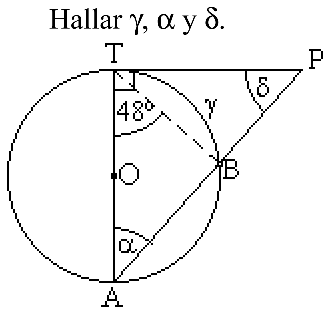
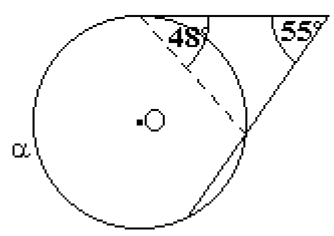
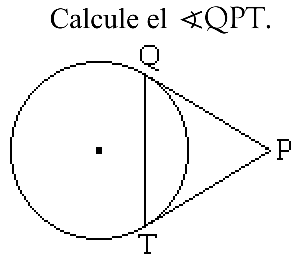
Cuadriláteros inscritos. Ángulos interiores y exteriores.

Nombre: ___________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Ejercicios

En cada circunferencia, O es centro y $\overline{AB}$ es cuerda y si pasa por el centro, es diámetro. Mientras que $\overset{\frown}{AB}$ es arco. Calcular las medidas que se piden y/o se indican tras un signo igual.

1. $\alpha = ?$; $\beta = ?$ 	**2.** $x =$ 	**3.** $x =$; $\beta =$ 
4. α, β, γ están en la razón de 5 : 4 : 7, respectivamente. Hallar δ. 	**5.** α = 2x+3; β = 2x; $\gamma = 3x - 3$ Hallar δ. 	**6.** $\overline{DC} \equiv \overline{CB}$; ∢DCB = 
7. $\alpha = 21°$, $\gamma = 63°$. $x =$ 	**8.** $x =$ 	**9.** $x =$ 
10. ∢APC = 	**11.** $\alpha =$ 	**12.** $\alpha =$ 

13. $\overline{AB}$ diámetro; $\alpha =$; $\beta =$ 	**14.** $\overline{AB}$ diámetro; $\widehat{DA} \equiv \widehat{BC}$. Si $\widehat{DA} = 50°$; $\widehat{CD} =$; $\alpha =$ 	**15.** $\gamma =$; $x =$; $\delta =$ 
16. α :β = 5 :8. Hallar α y β. 	**17.** α y β cumplen con: $\alpha = 2x - 3$ y $\beta = 3x + 1$. Hallar α y β. 	**18.** Si α = 138° y β = 50°. δ = ? 
19. α : β = 36 : 13. δ = 46. $\alpha =$; $\beta =$ 	**20.** $\overline{PD} \equiv \overline{DA}$. $\widehat{CA} =$ 	**21.** $\overline{PA} \equiv \overline{PC}$. $\widehat{BD} = 53°$ $\delta =$; $\widehat{CA} =$ 
22. $\alpha =$; $\beta =$; $\delta =$ 	**23.** $\alpha =$; $\beta =$ 	**24.** $\overline{TP}$ tangente. $\alpha =$ 
25. $\overline{TA}$ diámetro, $\overline{TP}$ tangente. Hallar γ, α y δ. 	**26.** $\alpha =$ 	**27.** $\overline{PT} \equiv \overline{PQ}$. Si $\widehat{QT} = 242°$, Calcule el ∢QPT. 

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

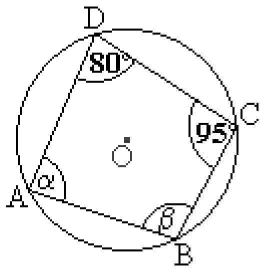
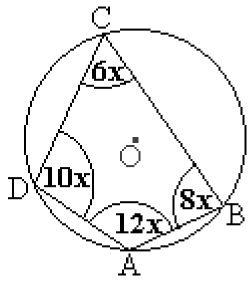
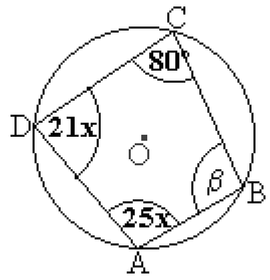
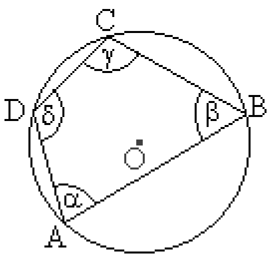
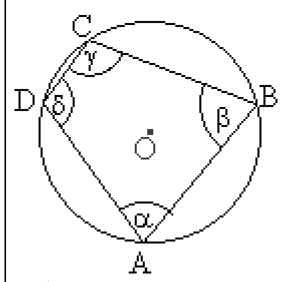
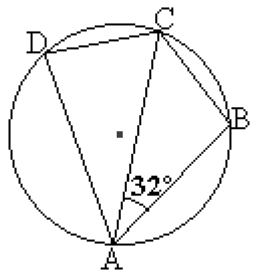
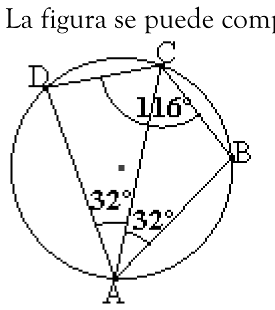
Ángulos en la Circunferencia

<u>Solucionario Listado Nº 2: Ejercicios Propuestos</u>

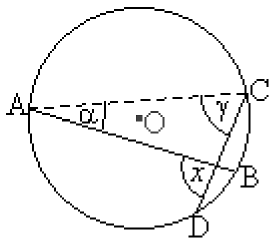
Cuadriláteros inscritos. Ángulos interiores y exteriores.

<u>Ejercicios</u>:

En cada circunferencia, O es centro y $\overline{AB}$ es cuerda y si pasa por el centro, es diámetro. Mientras que $\overset{\frown}{AB}$ es arco. Calcular las medidas que se piden y/o se indican tras un signo igual.

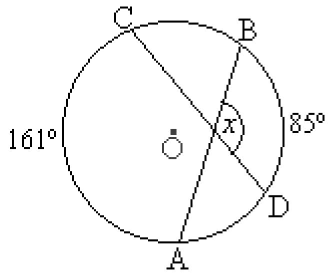
1. $\alpha = ?;\quad \beta = ?$  <u>Solución</u>: En todo cuadrilátero inscrito en una ⊗, los ángulos opuestos son suplementarios (suman 180º). Así, en la figura de arriba: $\alpha + 95^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 85^\circ$ $\beta + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 100^\circ$	**2.** Halle los ángulos del cuadrilátero.  <u>Solución</u>: Como en cada pareja de ángulos opuestos hay una sola incógnita, basta tomar cualquier pareja. $10x + 8x = 180^\circ$ $18x = 180^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$ Ahora reemplazamos este valor en cada expresión algebraica de cada vértice y los ángulos pedidos son: 100º, 120º, 80º y 60º.	**3.** $x = ?;\quad \beta = ?$  <u>Solución</u>: Los ángulos opuestos suman 180º. Así, en la figura de arriba, solo nos sirve en un principio los ángulos opuestos que presentan en la suma un solo valor desconocido, *x*. $25x + 80^\circ = 180^\circ$ $25x = 100^\circ \Rightarrow x = 4^\circ$ Ahora reemplazamos el valor hallado de *x* en la otra pareja de ángulos opuestos. $21x + \beta = 180^\circ$ $21 \bullet 4 + \beta = 180^\circ$ $84 + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 96^\circ$.
4. α, β y γ están en la razón de 5 **:** 4 **:** 7. Hallar δ.  <u>Solución</u>: α y γ son ángulos opuestos, por lo tanto suman 180º. Además, están entre sí en la razón 5 **:** 7. $\alpha + \gamma = 180^\circ$ $5p + 7p = 180^\circ$ (donde *p* es cada parte) $12p = 180^\circ \Rightarrow p = \dfrac{180^\circ}{12} = 15^\circ$. Ahora vamos a ver la pareja de ángulos opuestos a δ. $\delta + \beta = 180^\circ$ $\delta + 4p = 180^\circ$ $\delta + 4 \bullet 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow \delta = 120^\circ$	**5.** $\alpha = 2x+3$; $\beta = 2x$; $\gamma = 3x - 3$ Hallar δ.  <u>Solución</u>: De la figura, nos sirve: $\alpha + \gamma = 180^\circ$ $(2x+3) + (3x - 3) = 180^\circ$ $5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$ Ahora que conocemos el valor de *x*, nos dirigimos a la pareja en donde se halla el ángulo pedido. $\delta + \beta = 180^\circ$ $\delta + 4x = 180^\circ$ $\delta + 4 \bullet 36^\circ = 180^\circ$ $\delta + 144^\circ = 180^\circ$ $\delta = 180^\circ - 144 = 36^\circ$	**6.** $\overline{DC} \equiv \overline{CB}$; $\sphericalangle DCB = ?$  <u>Solución</u>: La figura se puede completar a  Pues a lados congruentes se oponen ángulos de igual medida. Por lo tanto, el ángulo pedido es suplementario con 64º. Así, $\sphericalangle DCB + 64^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow \sphericalangle DCB = 116^\circ$

7. $\alpha = 21^{\circ}$, $\gamma = 63^{\circ}$. $x = ?$



Solución:
x es ángulo exterior del triángulo, por lo tanto, equivale a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a el.
$x = \alpha + \gamma = 21^{\circ} + 63^{\circ} = 84^{\circ}$

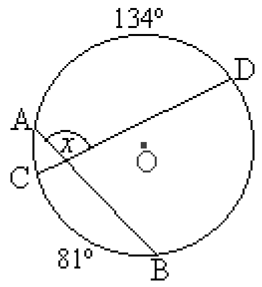
8. $x = ?$



Solución:
Solo tenemos que x es ángulo interior entre las dos cuerdas, pero es suficiente. Su cálculo viene dado por el promedio de los arcos que "subtiende" el y su opuesto por el vértice.

$$x = \frac{161^{\circ}+85^{\circ}}{2} = \frac{246^{\circ}}{2} = 123^{\circ}$$

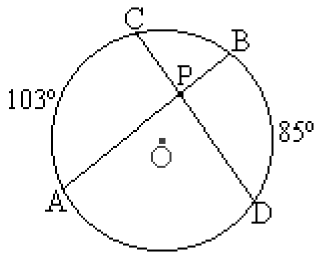
9. $x = ?$



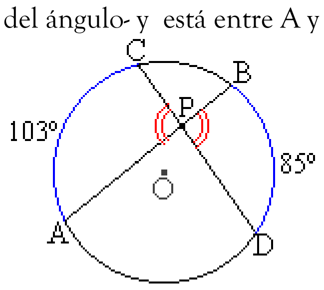
Solución:
Análogo al anterior:

$$x = \frac{81^{\circ}+134^{\circ}}{2} = \frac{225^{\circ}}{2} = 112,5^{\circ}$$

10. $\sphericalangle APC = ?$



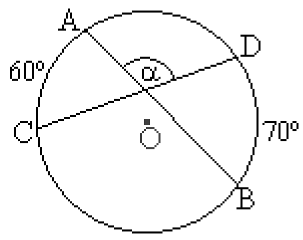
Solución:
El ángulo pedido tiene vértice en P –el punto medio de la notación del ángulo- y está entre A y C.



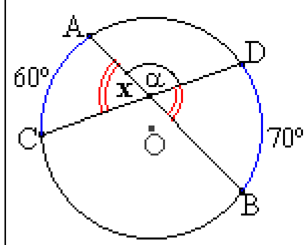
Su cálculo viene dado por el promedio de los arcos que "subtiende" el y su opuesto por el vértice.

$$x = \frac{103^{\circ}+85^{\circ}}{2} = \frac{188^{\circ}}{2} = 94^{\circ}$$

11. $\alpha = ?$



Solución:

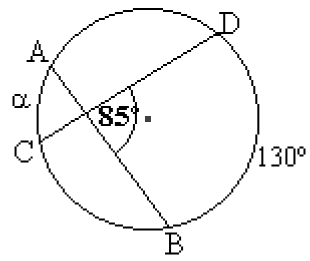


Con los arcos dados, en principio solo podemos calcular al ángulo x y su opuesto por el vértice, que se ha indicado en la figura.

$$x = \frac{60^{\circ}+70^{\circ}}{2} = \frac{130^{\circ}}{2} = 65^{\circ}$$

Pero x y α son ángulos adyacentes suplementarios, por lo que:
$x + \alpha = 180^{\circ}$
$65^{\circ} + \alpha = 180^{\circ} \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} - 65^{\circ}$
$= 115^{\circ}$

12. $\alpha = ?$

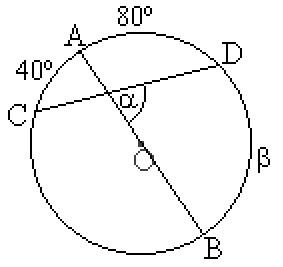


Solución:
Esta vez conocemos el ángulo interior. Su relación con las medidas de los arcos es que equivale a su promedio. Es decir,

$$85^{\circ} = \frac{\alpha + 130^{\circ}}{2}$$

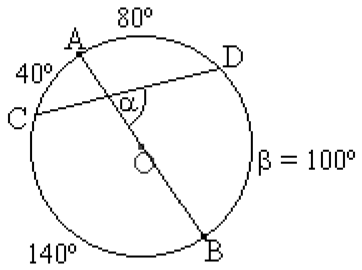
Ahora despejaremos α.
$85^{\circ} \bullet 2 = \alpha + 130^{\circ}$
$170^{\circ} - 130^{\circ} = \alpha$
$40^{\circ} = \alpha$

13. $\overline{AB}$ diámetro; α = ? ; β = ?



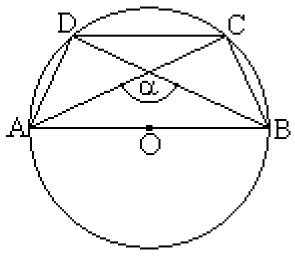
Solución:

El diámetro $\overline{AB}$ divide a la ⊗ en dos arcos congruentes de 180°.
Aquí tenemos algunas medidas de arcos, por lo que podemos completar las semi ⊗ a 180° cada uno:



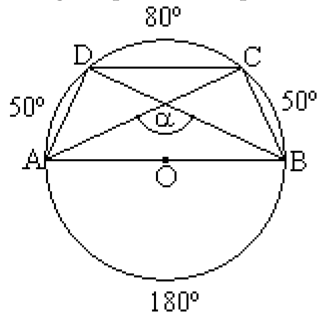
Y por ser α ángulo interior: $\alpha = \dfrac{40° + 100°}{2} = 70°$.

14. $\overline{AB}$ diámetro; $\widehat{DA} \equiv \widehat{BC}$.
Si $\widehat{DA} = 50°$; $\widehat{CD}$ = ? ; α = ?



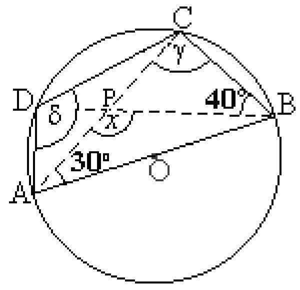
Solución:

Teniendo presente que el diámetro define dos arcos de circunferencia de 180° y que
$\widehat{DA} \equiv \widehat{BC}$ con $\widehat{DA}$ = 50°
$\Rightarrow \widehat{BC}$ = 50°
La figura puede completarse a:



Y que α es ángulo interior –igual al promedio del arco que "subtiende" el y su opuesto por el vértice-, entonces:
$\alpha = \dfrac{180° + 80°}{2} = 130°$.

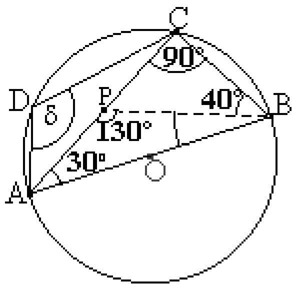
15. $\gamma = ?$; $x = ?$; $\delta = ?$



Solución:

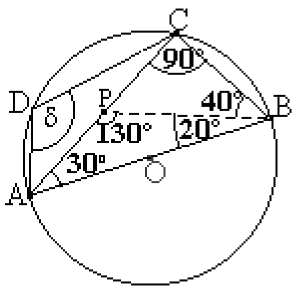
γ = 90° por ser ∢ inscrito que subtiende un arco de media circunferencia.
x es ∢ exterior del ΔBCP por lo tanto, es igual a la suma de los dos ∢*s* interiores no adyacentes a el.
Esto es, x = 40° + 90° = 130°.

Nos falta δ, el cual es suplementario con el ∢ ABC (por ser opuestos dentro de un cuadrilátero inscrito en una ⊗)
Tenemos:



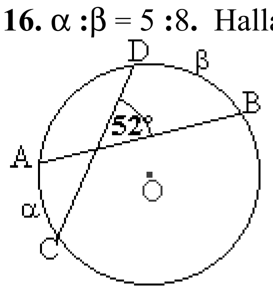
Completando ∢*s* interiores en el ΔABC (para que su suma sea igual a 180°) hallamos que:
∢ ABC = 60°
⇒ δ = 180° – 60° = 120°.

También se podría lograr completando los ángulos interiores a 180° en el ΔABP con lo que:
∢ ABP = 20°.



y δ = 120° –(40+20)°
= 180° – 60°
= 120°.

16. $\alpha : \beta = 5 : 8$. Hallar α y β.



Solución:

α se compone de 5 partes ($5p$) y β de 8 partes ($8p$). Además, 52º es el ángulo interior de α y β.

Por lo tanto,

$$\underbrace{52^\circ = \frac{5p+8p}{2} = \frac{13p}{2}}_{13p} \quad / \bullet 2$$

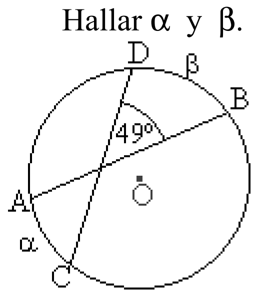
$$104^\circ = 13p \quad /:13$$

$$8 = p$$

Finalmente,

$\alpha = 5p = 40^\circ$ y $\beta = 8p = 64^\circ$.

17. α y β cumplen con: $\alpha = 2x - 3$ y $\beta = 3x + 1$. Hallar α y β.



Solución:

$$49^\circ = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$49^\circ = \frac{2x - 3 + 3x + 1}{2}$$

$$98^\circ = 5x - 2$$

$$100^\circ = 5x$$

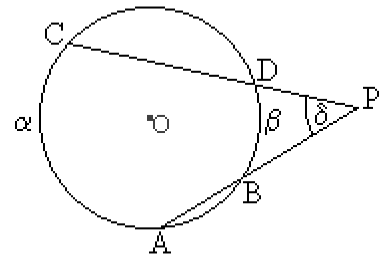
$$20^\circ = x$$

Reemplazando el valor de x en α y β obtenemos:

$$\alpha = 2x - 3 = 37^\circ$$

$$\beta = 3x + 1 = 61^\circ$$

18. Si $\alpha = 138^\circ$ y $\beta = 50^\circ$. $\delta = ?$

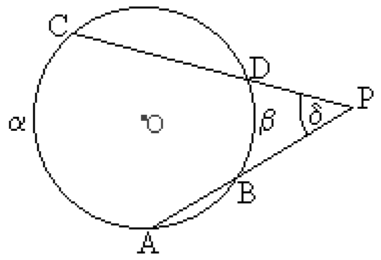


Solución:

δ es ángulo exterior a la circunferencia, por lo que se relaciona con α y β por la igualdad:

$$\delta = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{138^\circ - 50^\circ}{2} = \frac{88^\circ}{2} = 44^\circ$$

19. $\alpha : \beta = 36 : 13$. $\delta = 46$. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



Solución:

$$\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

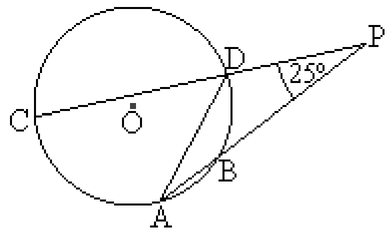
$$46^\circ = \frac{36p - 13p}{2} = \frac{23p}{2} \quad \bullet 2$$

$$92^\circ = 23p$$

$$\frac{92}{23} = p$$

$$p = 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 36p = 144^\circ \\ \beta = 13p = 52^\circ \end{cases}$$

20. $\overline{PD} \equiv \overline{DA}$. $\widehat{CA} = ?$



Solución:

El ΔAPD es isósceles, con:

$\sphericalangle DAP = \sphericalangle APD = 25^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle ADP = 130^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle CDA = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CA} = 100^\circ$

Usamos:

- $\sphericalangle$ s basales
- Suma de $\sphericalangle$ s interiores en ΔADP.
- $\sphericalangle$ s adyacentes suplementarios.

También podíamos usar $\sphericalangle$ exterior a un Δ:

$\sphericalangle DAP = \sphericalangle APD = 25^\circ$

y $\widehat{CA} = 2\sphericalangle CDA$

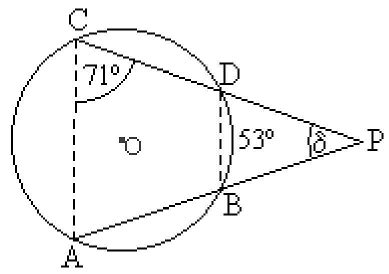
$= 2(\sphericalangle DAP + \sphericalangle DPA)$

$= 2(25^\circ + 25^\circ)$

$= 2 \bullet 50^\circ$

$= 100^\circ$

21. $\overline{PA} \equiv \overline{PC}$. $\widehat{BD} = 53^\circ$. $\delta = ?$; $\widehat{CA} = ?$



Solución:

El ΔAPC es isósceles, con:

$\sphericalangle CAP = \sphericalangle ACP = 71^\circ$

$\Rightarrow \delta = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ$

Además:

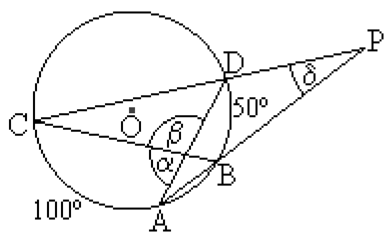
$$\delta = \frac{\widehat{CA} - \beta}{2}$$

$$38^\circ = \frac{\widehat{CA} - 53^\circ}{2}$$

$$76^\circ = \widehat{CA} - 53^\circ \Rightarrow \widehat{CA} = 76^\circ + 53^\circ = 129^\circ$$

(No es el único camino, también se puede lograr completando ángulos y arcos en la figura).

22. $\alpha = ?; \quad \beta = ?; \quad \delta = ?$



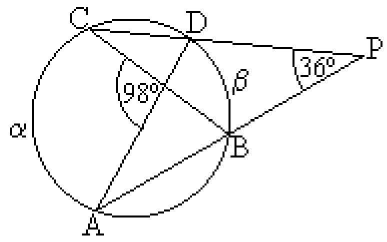
Solución:

$\delta = \dfrac{100^\circ - 50^\circ}{2} = \dfrac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

$\alpha = \dfrac{100^\circ + 50^\circ}{2} = \dfrac{150^\circ}{2} = 75^\circ$

$\beta = 105^\circ$ $\sphericalangle$s ady. suplentarios

23. $\alpha = ?; \quad \beta = ?$

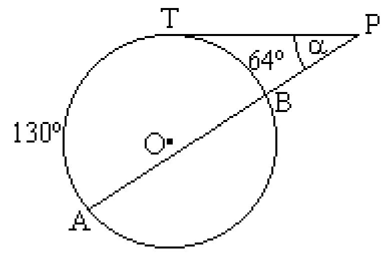


Solución:

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 98^\circ \\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} = 36^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{l} \alpha+\beta = 196^\circ \\ \alpha-\beta = 72^\circ \end{array}\right]}$

$2\alpha = 268^\circ$
$\Rightarrow \alpha = 134^\circ$
$\Rightarrow \beta = 62^\circ$

24. $\overline{TP}$ tangente. $\alpha = ?$



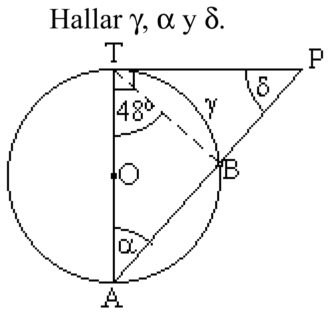
Solución:

$\alpha = \dfrac{130^\circ - 64^\circ}{2}$

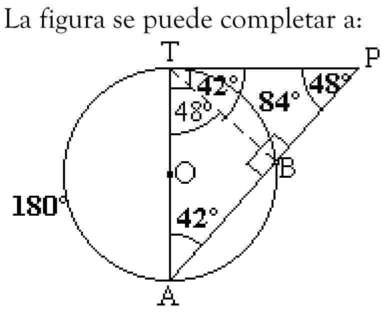
$= \dfrac{74^\circ}{2}$

$= 37^\circ$

25. $\overline{TA}$ diámetro, $\overline{TP}$ tangente. Hallar γ, α y δ.



Solución:
La figura se puede completar a:

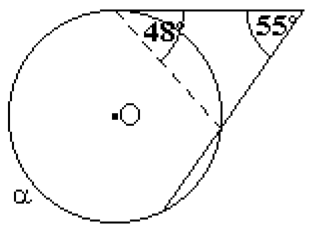


Donde:
α = 42º pues α + 48º = 90º en ΔABT.

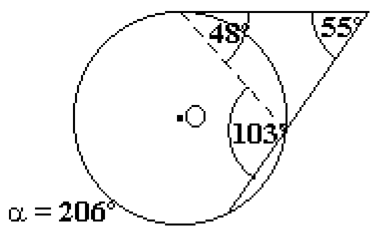
γ = 2α = 84º por ser arco que subtiende tal ángulo inscrito.

δ = 48º pues δ + 42º = 90º en ΔBPT.

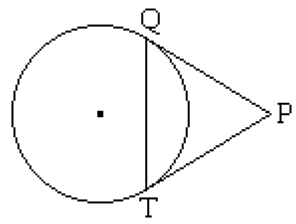
26. $\alpha = ?$



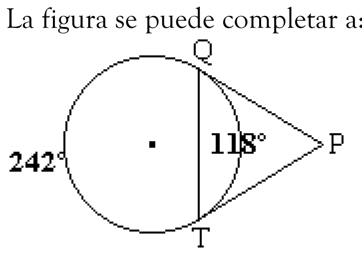
Solución:
El ángulo exterior al triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a el.
48º+55º= 103º (ver sgte. figura)
Y el arco subtendido siempre mide el doble que el ángulo inscrito que lo subtiende. Por lo tanto:
α = 206º



27. $\overline{PT} \equiv \overline{PQ}$. Si $\widehat{QT} = 242^\circ$, Calcule el $\sphericalangle$QPT.



Solución:
La figura se puede completar a:



De donde:

$\sphericalangle QPT = \dfrac{242^\circ - 118^\circ}{2} = \dfrac{124^\circ}{2}$
$= 62^\circ$

No solo en relación a este ejercicio en particular sino que en general, las tangentes trazadas desde un mismo punto a una misma circunferencia son SIEMPRE congruentes.

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Ángulos en la Circunferencia

Listado Nº 3: Ejercicios (Propuestos)

Nombre: ______________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

En cada circunferencia, O es centro y $\overline{AB}$ es cuerda y si pasa por el centro, es a su vez diámetro. Mientras que $\overset{\frown}{AB}$ es arco. Calcular en cada caso, las medidas que se indican.

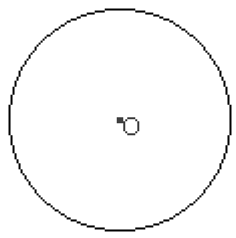
i) Dibujar sobre la ⊗:

Una cuerda $\overline{AB}$ que coincida con un diámetro de la ⊗;

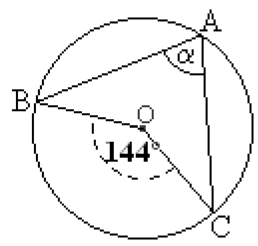
Una cuerda $\overline{CD}$ que toque otros dos puntos de la ⊗;

Una recta tangente $\overline{PT}$, formando un ángulo de 90º con un radio $\overline{OT}$;

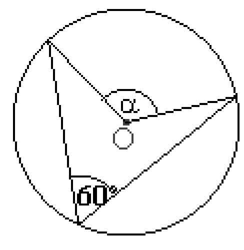
Una recta secante L que corte a la ⊗ en dos puntos.



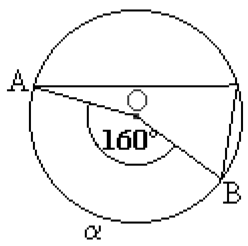
ii) $\alpha = ?$



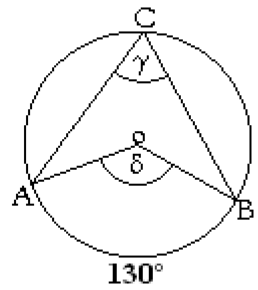
iii) $\alpha = ?$



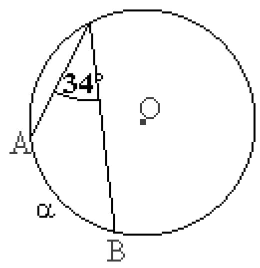
iv) $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



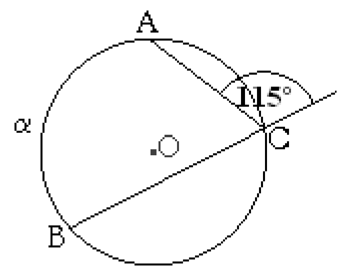
v) $\overset{\frown}{AB} = 130º \Rightarrow \gamma = ?;\ \delta = ?$



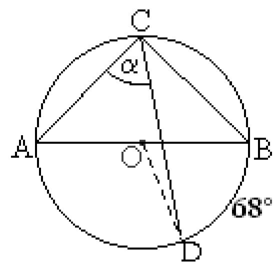
vi) $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



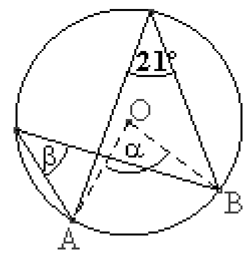
vii) $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



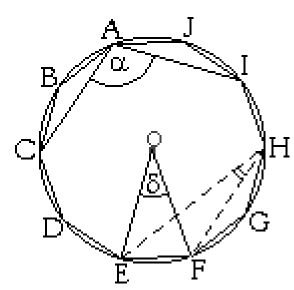
viii) $\alpha = ?$



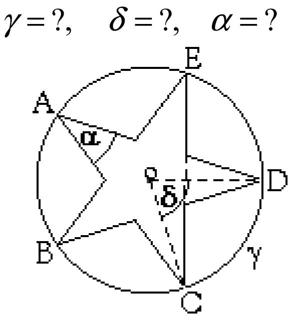
ix) $\alpha = ?,\quad \beta = ?$



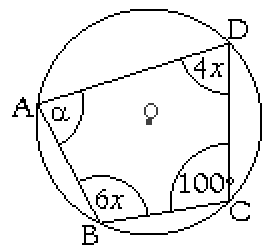
x) El decágono regular (polígono de 10 lados de igual medida) esta inscrito en la ⊗.
$\delta = ?;\quad \sphericalangle EHF = ?;\quad \alpha = ?$



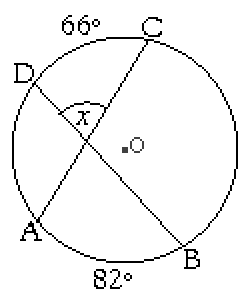
xi) La estrella tiene todos sus lados y ángulos inscritos de igual medida.
$\gamma = ?,\quad \delta = ?,\quad \alpha = ?$



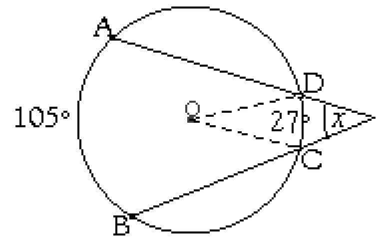
xii) $\alpha = ?;\quad x = ?;$
$\sphericalangle ABC = ?;\quad \sphericalangle CDA = ?$



xiii) $x = ?$



xiv) $x = ?$



Ángulos en la Circunferencia

Solucionario Listado Nº 3: Ejercicios Propuestos

Nombre: ________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

En cada circunferencia, O es centro y $\overline{AB}$ es cuerda y si pasa por el centro, es a su vez diámetro. Mientras que $\overset{\frown}{AB}$ es arco. Calcular en cada caso, las medidas que se indican.

i) *Dibuja sobre la ⊗*:

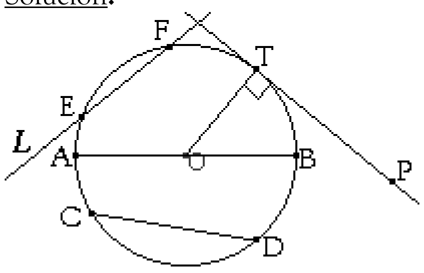
Una cuerda $\overline{AB}$ que coincida con un diámetro de la ⊗;

Una cuerda $\overline{CD}$ que toque otros dos puntos de la ⊗;

Una semirecta tangente $\overline{PT}$, formando un ángulo de 90º con un radio $\overline{OT}$;

Una recta secante L que corte a la ⊗ en dos puntos.

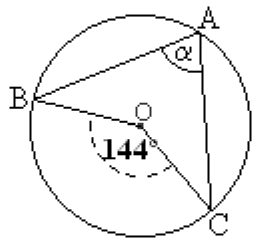
Solución:



En la figura, la recta **L** corta a la ⊗ en los puntos E y F.

Además, toda recta tangente a una ⊗, forma un ángulo recto (90º) con el radio. En la figura: $\overline{OT} \perp \overline{PT}$.

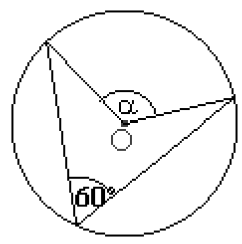
ii) $\alpha = ?$



Solución:
α es un ángulo inscrito, por lo tanto, mide la mitad que el ángulo del centro que subtiende el mismo arco que el:

$$\alpha = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$$

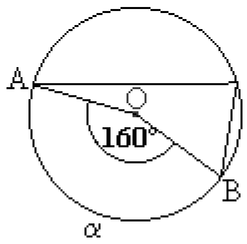
iii) $\alpha = ?$



Solución:
α es un ángulo del centro, por lo tanto mide el doble que el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco que el:

$$\alpha = 2 \bullet 60 = 120^\circ$$

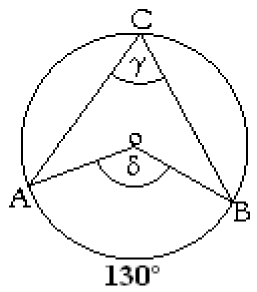
iv) $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



Solución:
Todo arco de ⊗ SIEMPRE mide lo mismo que el ∢ del centro que lo subtiende. Por lo tanto:

$\overset{\frown}{AB} = 160^\circ$ O bien: $\alpha = 160^\circ$

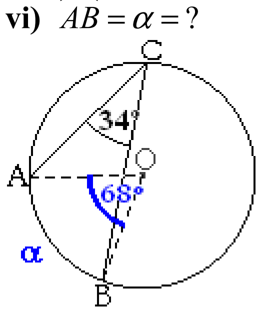
v) $\overset{\frown}{AB} = 130^\circ \Rightarrow \gamma = ?;\ \delta = ?$



Solución:
δ es un ángulo del centro que subtiende al $\overset{\frown}{AB}$, por lo tanto, mide lo mismo que el. Es decir:
δ = 130º.
Mientras que todo ángulo inscrito mide la mitad que el arco que subtiende, es decir:

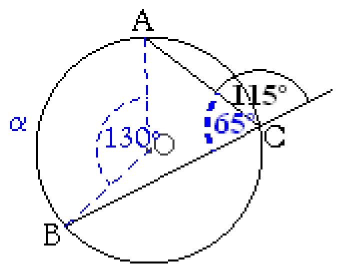
$$\gamma = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

vi) $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



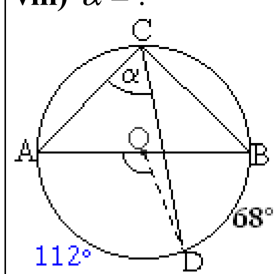
Solución:
El arco α mide lo mismo que el ∢ del centro que lo subtiende y este a su vez, el doble que el ∢ inscrito que subtiende al arco α. Es decir,
α = ∢ del centro $= 2 \bullet 34^\circ = 68^\circ$.

vii) $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



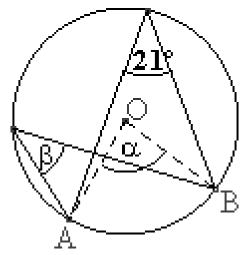
Solución: Completamos los ∢s adyacentes suplementarios (que sumados dan 180º) hallando la medida del ∢ inscrito de 65º.
El respectivo ∢ del centro y α miden su doble: $\alpha = 2 \bullet 65^\circ = 130^\circ$.

viii) $\alpha = ?$



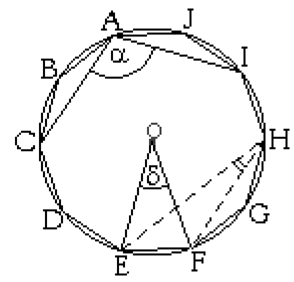
Solución: $\overset{\frown}{AD}$ y $\overset{\frown}{DB}$ forman media circunferencia, es decir 180º.
Así, $\overset{\frown}{AD} = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$
y α que subtiende al ∢ = 112º es inscrito. Por lo tanto mide su mitad: $\alpha = 112^\circ / 2 = 56^\circ$.

ix) $\alpha = ?$, $\beta = ?$



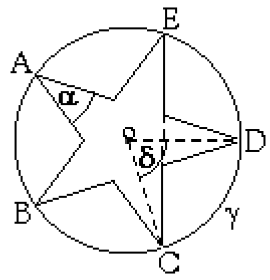
Solución:
Todos los ∢s inscritos que subtienden el mismo arco de ⊗ son iguales. Es decir, $\beta = 21^\circ$.
Y todo ∢ del centro que subtienda el mismo arco de ⊗ que un ∢ inscrito, medirá el doble que este. Es decir, $\alpha = 2 \bullet 21^\circ = 42^\circ$.

x) El decágono regular (polígono de 10 lados iguales) esta inscrito en la ⊗.
$\delta = ?$; $\sphericalangle EHF = ?$; $\alpha = ?$



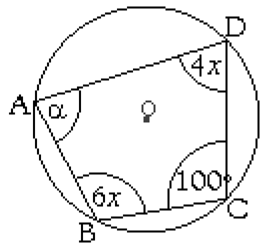
Solución:
Cada vértice del decágono regular divide los 360° de la circunferencia en diez arcos y ángulos del centro congruentes.
Es decir, $\delta = \dfrac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.
Entonces, el ángulo inscrito: $\sphericalangle EHG = \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{36^\circ}{2} = 18^\circ$.
Y se puede observar que α equivale a seis medidas de 18°. Es decir:
$\alpha = 6 \bullet 18^\circ = 108^\circ$.

xi) La estrella tiene todos sus lados y ángulos inscritos de igual medida.
$\gamma = ?$, $\delta = ?$, $\alpha = ?$



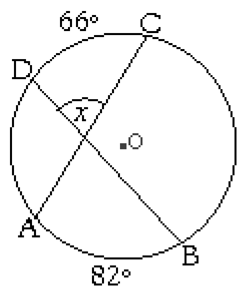
Solución:
Cada vértice de la estrella divide los 360° de la ⊗ en 5 arcos y ángulos del centro congruentes.
Es decir, $\gamma = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.
Todo ángulo del centro tiene igual medida que el arco que subtiende, por lo tanto:
$\delta = \gamma = 72^\circ$
Mientras, $\alpha = \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

xii) $\alpha = ?$; $x = ?$;
$\sphericalangle ABC = ?$; $\sphericalangle CDA = ?$



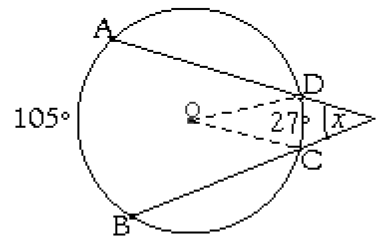
Solución:
∢s opuestos en una ⊗ son suplementarios (sumados dan 180°)
Así pues, $\alpha + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 80^\circ$
A su vez, $6x + 4x = 180^\circ$
$10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$
$\Rightarrow \sphericalangle ABC = 6 \bullet 18^\circ = 108^\circ$.
$\Rightarrow \sphericalangle CDA = 4 \bullet 18^\circ = 72^\circ$.

xiii) $x = ?$



Solución: x es ∢ interior y su medida queda determinada por:
$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{82^\circ + 66^\circ}{2} = \frac{148^\circ}{2} = 74^\circ$$

xiv) $x = ?$



Solución: x es ∢ exterior a la ⊗ y su medida queda determinada por:
$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{105^\circ - 27^\circ}{2} = \frac{78^\circ}{2} = 39^\circ$$

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

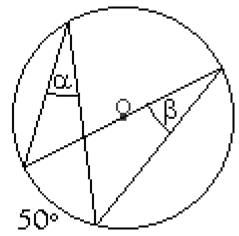
Ángulos en la Circunferencia

Listado Nº 4: Ejercicios Propuestos

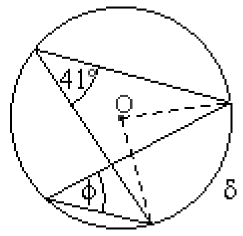
Nombre: ___________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Ejercicios:
Calcular las medidas de α y β según corresponda.

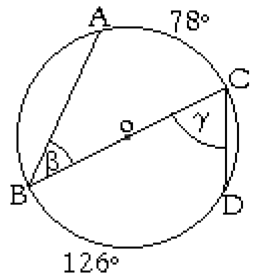
1. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



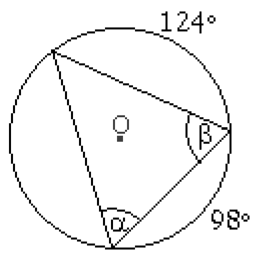
2. $\phi = ?$; $\delta = ?$



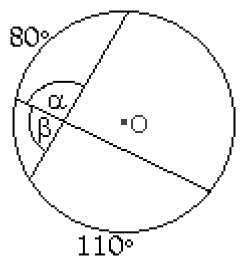
3. $\beta = ?$; $\gamma = ?$



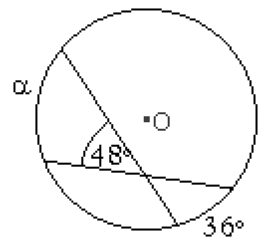
4. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



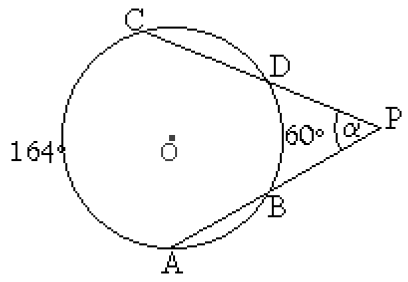
5. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



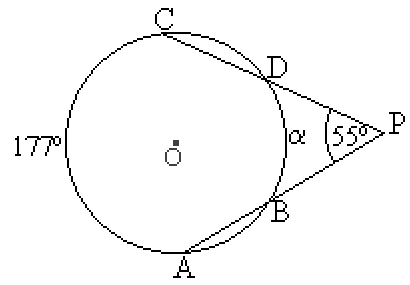
6. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



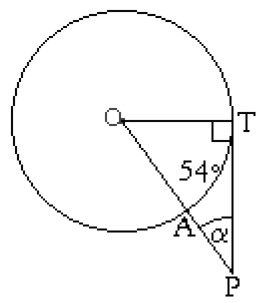
7. $\alpha = ?$



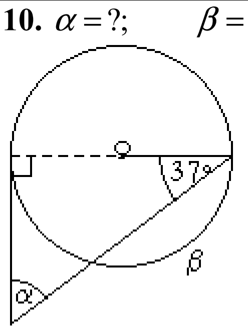
8. $\alpha = ?$



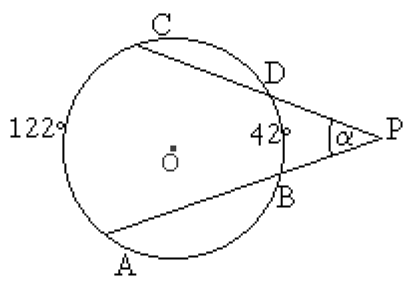
9. $\widehat{AT} = 54°$; con $\overline{OT}$ radio. y $\overline{PT} \perp \overline{OT}$. Entonces, $\alpha = ?$



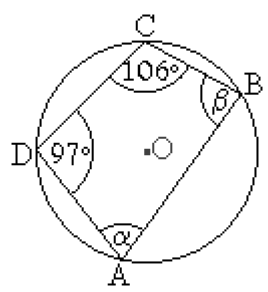
10. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



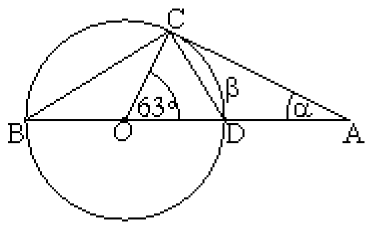
11. $\alpha = ?$



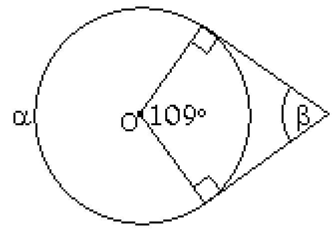
12. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



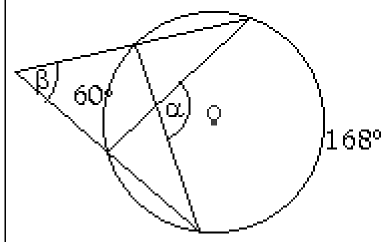
13. $\overline{AC}$ es tangente a la ⊗
$\alpha = ?$; $\beta = ?$



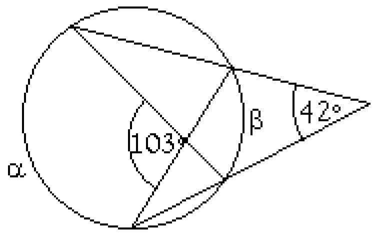
14. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



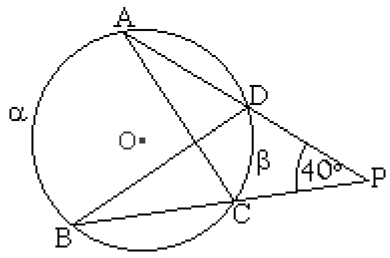
15. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



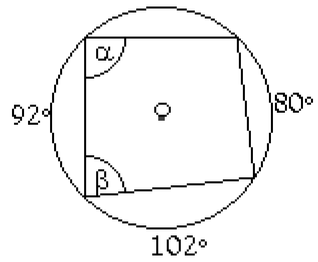
16. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



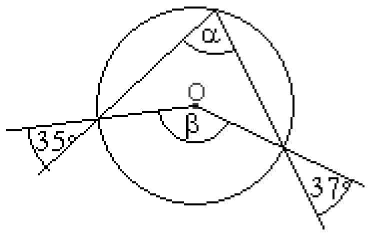
17. Si $\alpha = 130°$, entonces $\beta = ?$



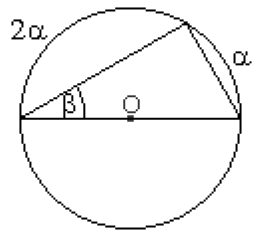
18. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



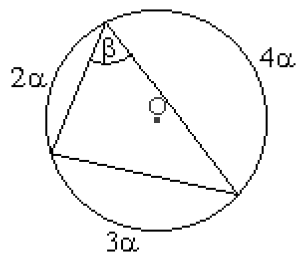
19. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



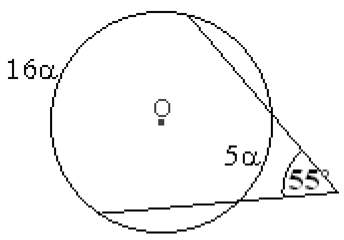
20. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



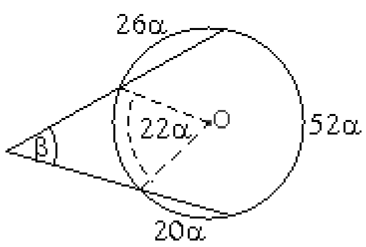
21. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



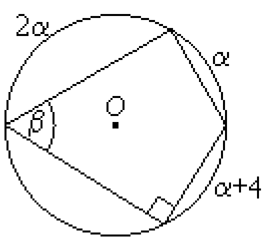
22. $\alpha = ?$



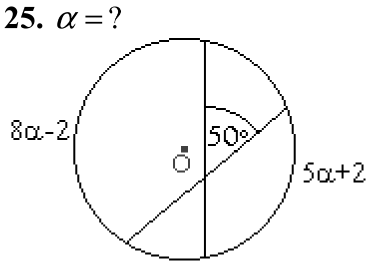
23. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



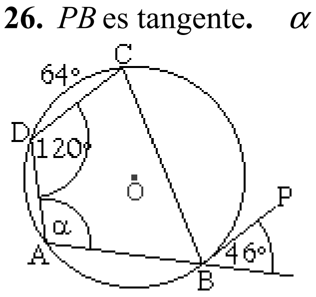
24. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



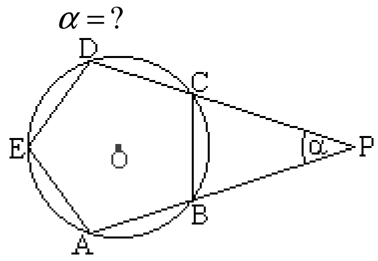
25. $\alpha = ?$



26. $\overline{PB}$ es tangente. $\alpha = ?$



27. ABCDE es polígono regular.
$\alpha = ?$



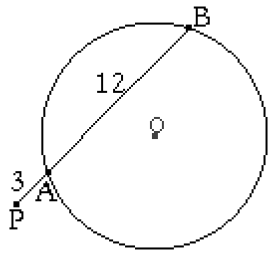
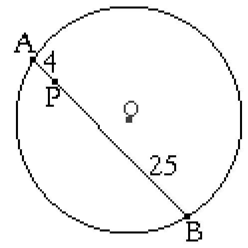
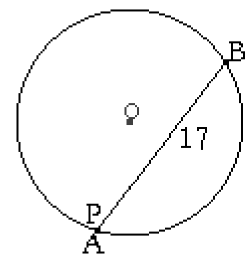
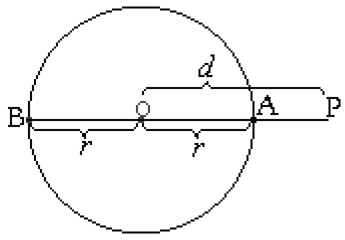
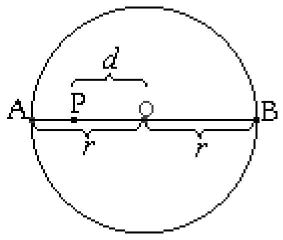
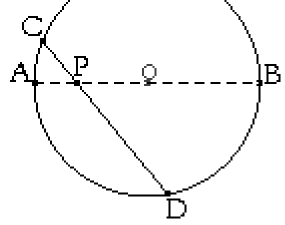
Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Segmentos Proporcionales en la Circunferencia

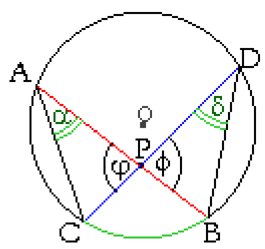
Definición:

1. Se define llama "***Potencia de un punto P***" respecto a la circunferencia, al número Pot(P), que se define como: $Pot(P) = PA \bullet PB$.

Ejemplos: (*las siguientes figuras no están a escala*)

i) Si $PA = 3$ y $AB = 12$. $Pot(\text{P}) = \text{PA} \bullet \text{PB}$  $= 3 \bullet (\text{PA} + \text{AB})$ $= 3 \bullet (3 + 12)$ $= 3 \bullet 15$ $= 45$	**ii)** Si $PA = 4$ y $PB = 25$  $\text{Pot(P)} = \text{PA} \bullet \text{PB}$ $= 4 \bullet 25$ $= 100$	**iii)** P *coincide con A*. AB = 17  Si P coincide con A: PA = 0 y PB = AB = 17. Entonces: $Pot(P) = \text{PA} \bullet \text{PB}$ $= 0 \bullet 17$ $= 0$
iv) Sea P un punto exterior a una ⊗ de radio *r*. Y *d* la distancia que hay de P al centro de la ⊗.  La potencia de *P* es: $Pot(P) = PA \bullet PB$ $= (d - r)(d + r)$ $= d^2 - r^2$	**v)** Si P es punto interior a una ⊗ de radio *r* y a una distancia *d* del centro de ella :  $Pot(P) = PA \bullet PB$ $= (r - d)(d + r)$ $= -(d - r)(d + r)$ $= r^2 - d^2$	**vi)** Aún cuando los puntos de la cuerda no coincidan con el diámetro, pero se mantiene el radio *r* de la ⊗ y la distancia *d* del punto P al centro, la potencia no varía.  El teorema a continuación garantiza que: $\text{PC} \bullet \text{PD} = \text{PA} \bullet \text{PB}$

2. Teorema de las Cuerdas



Dada la siguiente figura de la derecha, se tiene que:

- $\varphi = \phi$ por ser ∢*s* opuestos por el vértice.
- $\alpha = \beta$ por ser ∢*s* inscr. que subtienden un mismo arco.

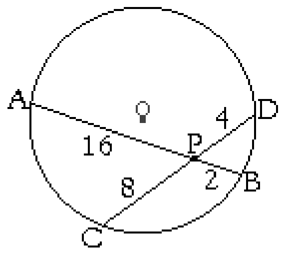
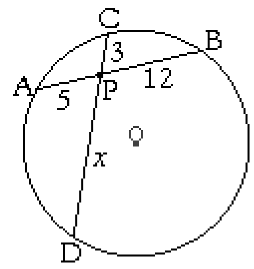
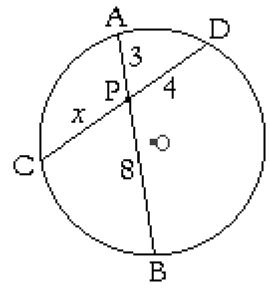
Por criterio de semejanza ángulo- ángulo (A.A.)
Se concluye que el ΔAPC ~ ΔBDP.
Esto implica que podemos escribir la proporción:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

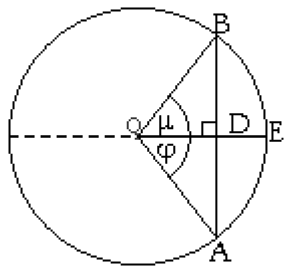
Esto significa o nos dice que "Los segmentos de dos cuerdas que se intersectan al interior de un circulo, son inversamente proporcionales".
Haciendo el producto cruzado, se obtiene: $PA \bullet PB = PC \bullet PD$.
Lo que significa que "*la potencia de un punto a través de una cuerda, es igual a la potencia del mismo punto, a través de la otra cuerda*". Tal propiedad se denomina "***Teorema relativo a la potencia de un punto interior a la circunferencia***".

Más conocido como "***Teorema de las cuerdas***": "*Si dos cuerdas de una ⊗ se intersectan en un punto P, el producto de las medidas de los segmentos definidos en una cuerda, es igual al producto de las medidas de los segmentos definidos en la otra cuerda*".

Ejemplos: (*las siguientes figuras no están a escala*)

<table>
<tr>
<td>i) $PA = 16;\ \ PB = 2;$
$PC = 8;\ \ PD = 4.$

El teo. de las cuerdas nos muestra que:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$16 \bullet 2 = 8 \bullet 4$
$32 = 32$</td>
<td>ii) Hallar $\overline{PD}$ si:
$PA = 5;\ \ PB = 12;\ \ PC = 3.$

Por teo. de las cuerdas:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$5 \bullet 12 = 3 \bullet PD$
$\frac{60}{3} = PD \Rightarrow PD = 20$</td>
<td>iii)Hallar $x = PC$ si:
$AP = 3;\ \ PB = 8;\ \ PD = 4.$

Por teo. de las cuerdas:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$3 \bullet 8 = PC \bullet 4$
$\frac{24}{4} = PC \Rightarrow PC = 6$</td>
</tr>
</table>

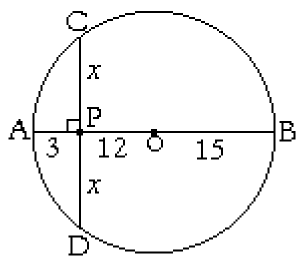
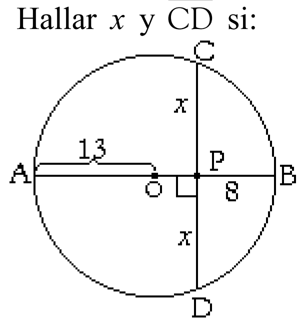
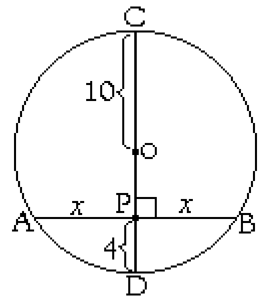
3. Es importante tener presente también, que "***toda cuerda que pase por el centro de la circunferencia divide en dos partes iguales a todo segmento rectilíneo perpendicular a ella.*** *Además, la intercepción con tal trazo rectilíneo biseca al ángulo del centro*".
Lo que se quiere indicar es, que dada una figura como la siguiente:



Tenemos:

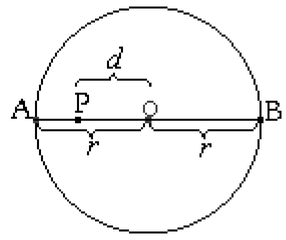
- $\overline{AD} = \overline{DB}$; $\mu = \varphi$; $\widehat{AE} = \widehat{EB}$;
- Además de lo más obvio, ΔOAB es isósceles, pues: $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son congruentes (radios de la ⊗).
  $\Rightarrow \measuredangle OAB = \measuredangle OBA$ ($\measuredangle s$ basales del Δ).

Ejemplos: (*las siguientes figuras no están a escala*)

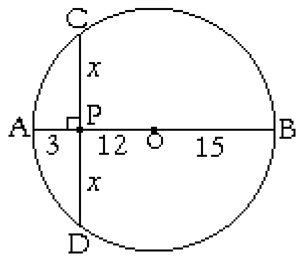
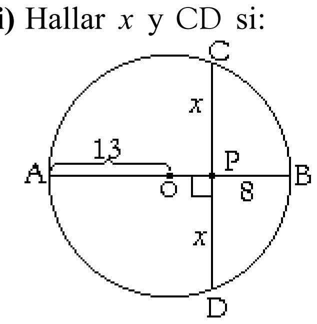
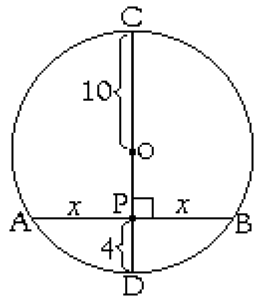
<table>
<tr>
<td>i) Hallar x si: $PA = 3;$
$PB = PO + OB = (12 + 15) = 27$
y $PC = PD = x$

El diámetro $\overline{AB}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{CD}$, por lo tanto, dimidia a esta ultima. Es decir, $\overline{CP} = \overline{PD}$ y por el teo. de las cuerdas:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$3 \bullet 27 = x \bullet x$
$81 = x^2 \quad /\sqrt{\ }$
$9 = x$</td>
<td>ii) Hallar x y $\overline{CD}$ si:

Primero identifiquemos los segmentos:
El radio mide 13.
$PA = r + OP$
$= 13 + (r - 8);\ r$ radio
$= 13 + (13 - 8) = 26 - 8 = 18$
$\overline{PB} = 8,\ \ \overline{PC} = \overline{PD} = x.$
Y por teo. de las cuerdas:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$18 \bullet 8 = x \bullet x$
$144 = x^2 \quad /\sqrt{\ }$
$12 = x \Rightarrow \overline{CD} = 2x = 24$</td>
<td>iii) Hallar x y $\overline{AB}$ si:
$OC = 10;\ PD = 4;\ PA = PB = x$

Por teo. de las cuerdas:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$x \bullet x = (PO + OC) \bullet 4$
$x^2 = [(10 - 4) + 10] \bullet 4$
$x^2 = [16] \bullet 4$
$= 64$
$\Rightarrow x = 8$
$\Rightarrow AB = 2x = 16$</td>
</tr>
</table>

Los ejercicios anteriores se pueden resolver también, combinando el teorema de las cuerdas con la potencia de un punto P interior a una ⊗. Veamos:
La expresión hallada para la Pot(P) en el interior de una ⊗ fue:

$$Pot(P) = r^2 - d^2$$



Veámoslo:
(*Las siguientes figuras no están a escala*)

i) Hallar x si: PA = 3; $PB = PO + OB = (12+15) = 27$ y $PC = PD = x$  – El radio es $r = 15$. – La distancia de P al centro es $d = 12$. – Luego, por potencia de un pto. interior a una ⊗: $Pot(P) = r^2 - d^2$ $= (15)^2 - (12)^2$ $= 225 - 144$ $= 81$ Y por teo. de las cuerdas: $PC \bullet PD = 81$ $x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$	**ii)** Hallar x y $\overline{CD}$ si:  Primero identificamos: – El radio: $r = 13$. – De B a P tenemos 8, por lo tanto faltan 5 para alcanzar la medida del radio igual a 13. $\Rightarrow$ La distancia del punto P al centro de la ⊗ es: $d = PO = 5$. – Luego, por potencia de un pto. interior a una ⊗: $Pot(P) = r^2 - d^2$ $= (13)^2 - (5)^2$ $= 169 - 25$ $= 144$ – Y por teo. de las cuerdas: $PC \bullet PD = 144$ $x \bullet x = 144$ $x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$ $\Rightarrow \overline{CD} = 2x = 24$	**iii)** Hallar x y $\overline{AB}$ si: $OC = 10$; $PD = 4$; $PA = PB = x$  Primero identificamos: – El radio: $r = 10$. – De D a P tenemos 4, por lo tanto faltan 6 para alcanzar la medida del radio igual a 10. $\Rightarrow$ La distancia del punto P al centro de la ⊗ es: $d = PO = 6$. – Luego, por potencia de un pto. interior a una ⊗: $Pot(P) = r^2 - d^2$ $= (10)^2 - (6)^2$ $= 100 - 36$ $= 64$ – Y por teo. de las cuerdas: $PA \bullet PB = 64$ $x \bullet x = 64$ $x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ $\Rightarrow \overline{AB} = 2x = 16$

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Relaciones métricas en la Circunferencia

Listado nº1: Ejercicios Propuestos

Relativo a teoremas de:

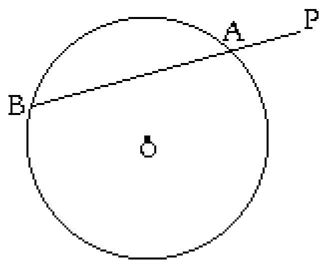
- Potencia de un punto;
- las cuerdas;
- diámetro y radio dimidiando perpendicularmente una cuerda;

Nombre: ________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

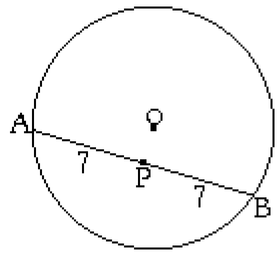
Ejercicios

Halle en cada ejercicio el valor faltante indicado por su respectivo enunciado.

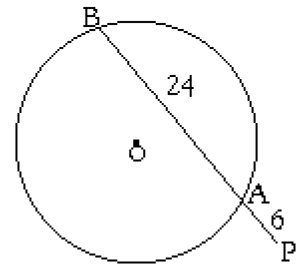
1. Si $PA = 3$ y $PB = 11$
Halle la $\text{Pot}(P) = PA \bullet PB$



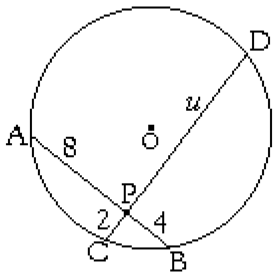
2. P punto medio de AB.
Si $PA = PB = 7$. La $\text{Pot}(P) = ?$



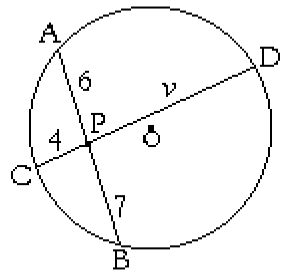
3. $PA = 6$ y $AB = 24$;
La $\text{Pot}(P) = PA \bullet PB = ?$



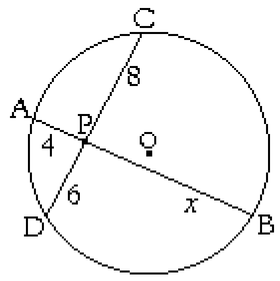
4. $u = ?$



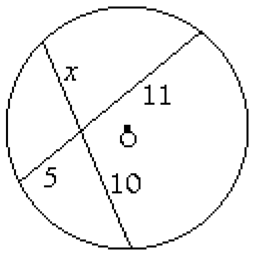
5. $v = ?$



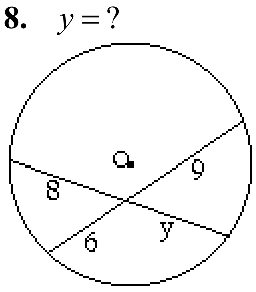
6. $x = ?$



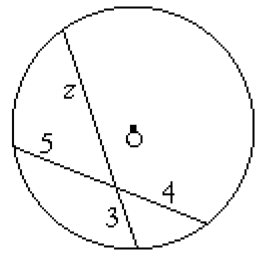
7. $x = ?$



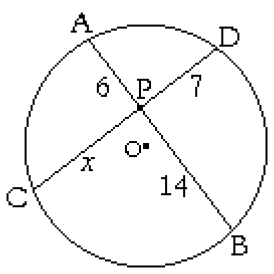
8. $y = ?$



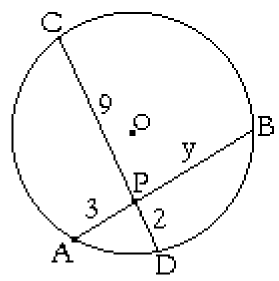
9. $z = ?$



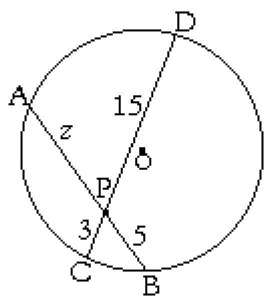
10. $x = ?$; $CD = ?$



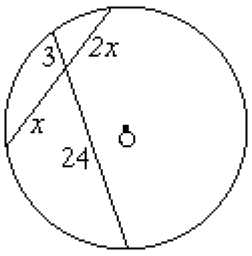
11. $y = ?$; $AB = ?$



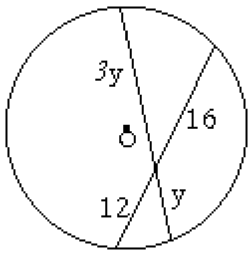
12. $z = ?$, $CD = ?$



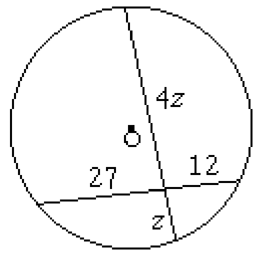
13. $x = ?$



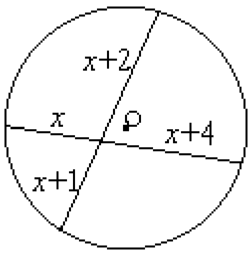
14. $y = ?$



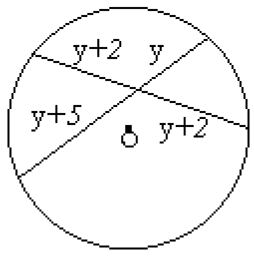
15. $z = ?$



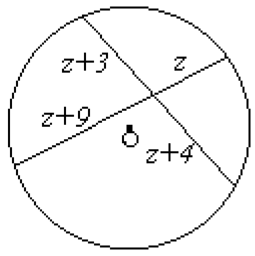
16. $x = ?$



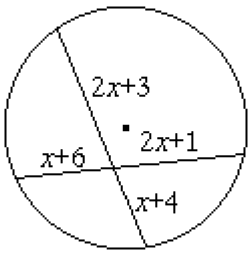
17. $x = ?$



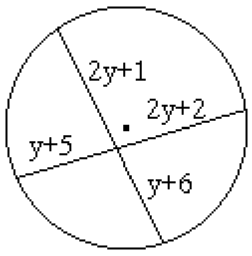
18. $z = ?$



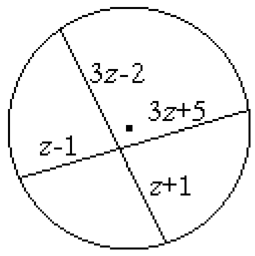
19. $x = ?$



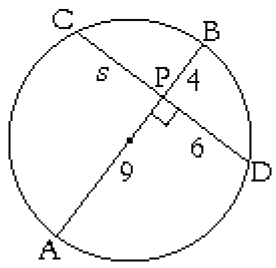
20. $y = ?$



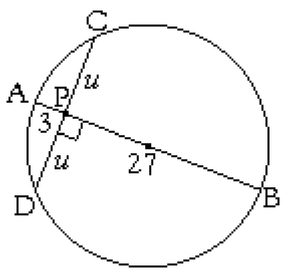
21. $z = ?$



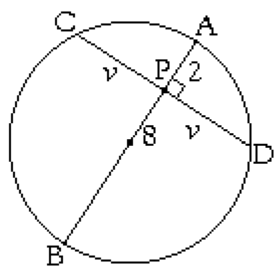
22. $\overline{AB}$ diámetro. Si $PA = 9$; $PB = 4$ y $PD = 6$. $s = ?$



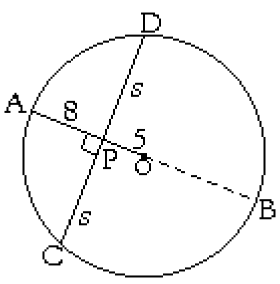
23. $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 3$ y $PB = 27$. $u = ?$



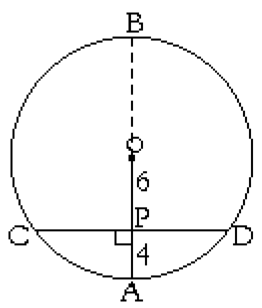
24. $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 2$ y $PB = 8$. $v = ?$



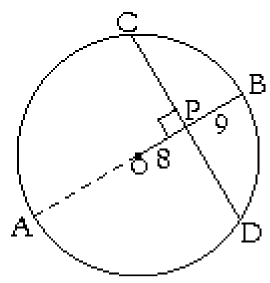
25. $\overline{OA}$ radio de la ⊗. $OP = 5$ y $PA = 8$. $s = ?$



26. $\overline{OA}$ radio de la ⊗. $OP = 6$; $PA = 4$. $CD = ?$



27. $\overline{OB}$ radio de la ⊗. $PB = 9$; $OP = 8$. $CD = ?$



Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Relaciones Métricas en la Circunferencia

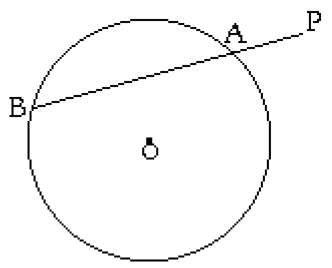
Solucionario Listado Nº 1: Ejercicios Propuestos

Relativos a teoremas o propiedades de:

- Potencia de un punto;
- las cuerdas;
- el diámetro y radio dimidiando perpendicularmente una cuerda;

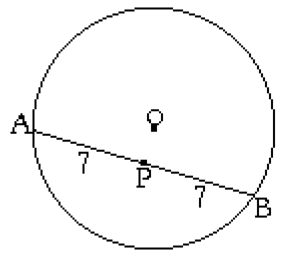
Ejercicios: Halle en cada ejercicio el valor faltante indicado por su respectivo enunciado.

1. Si $PA = 3$ y $PB = 11$
Halle la $\text{Pot(P)} = PA \bullet PB$



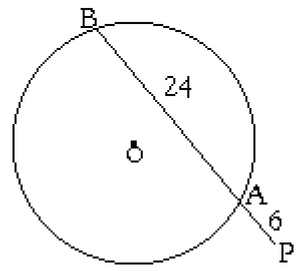
Solución:
$\text{Pot(P)} = PA \bullet PB = 3 \bullet 11 = 33$

2. P punto medio de AB.
Si $PA = PB = 7$. La $\text{Pot(P)} = ?$



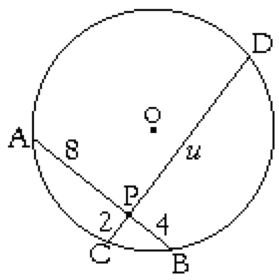
Solución:
$\text{Pot(P)} = PA \bullet PB = 7 \bullet 7 = 49$

3. $PA = 6$ y $AB = 24$;
La $\text{Pot(P)} = PA \bullet PB = ?$



Solución:
$\text{Pot(P)} = PA \bullet PB$
$= 6 \bullet (6+24) = 6 \bullet 30 = 180$

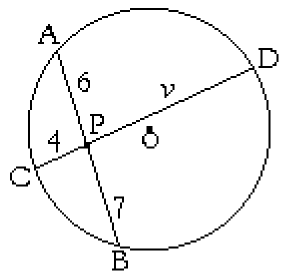
4. $u = ?$



Solución:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$$\left.\begin{array}{l} 8 \bullet 4 = 2 \bullet u \\ 32 = 2u \end{array}\right\} \Rightarrow u = \frac{32}{2} = 16$$

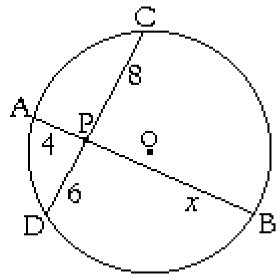
5. $v = ?$



Solución:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$$\left.\begin{array}{l} 6 \bullet 7 = 4 \bullet v \\ 42 = 4v \end{array}\right\} \Rightarrow u = \frac{42}{4} = 10,5$$

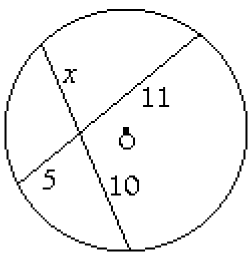
6. $x = ?$



$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

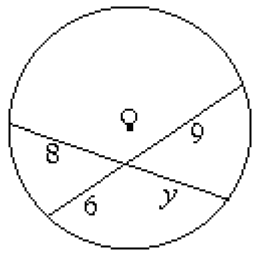
$$\left.\begin{array}{l} 4 \bullet x = 8 \bullet 6 \\ 4x = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{48}{4} = 12$$

7. $x = ?$



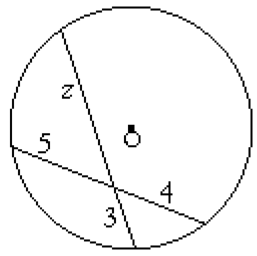
$$\left.\begin{array}{l} x \bullet 10 = 5 \bullet 11 \\ 10x = 55 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{55}{10} = 5,5$$

8. $y = ?$



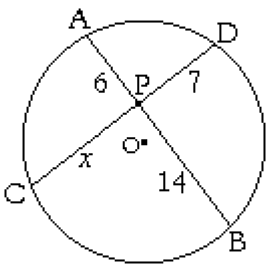
$$\left.\begin{array}{l} 8y = 6 \bullet 9 \\ 8y = 54 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$$

9. $z = ?$



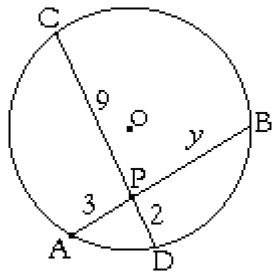
$$\left.\begin{array}{l} 3z = 5 \bullet 4 \\ 3z = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \frac{20}{3}$$

10. $x = ?$; $CD = ?$



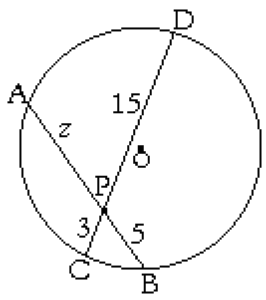
$$6 \bullet 14 = 7x \Rightarrow x = \frac{6 \bullet \cancel{14}^{2}}{1\cancel{7}} = 12$$

11. $y = ?$; $AB = ?$



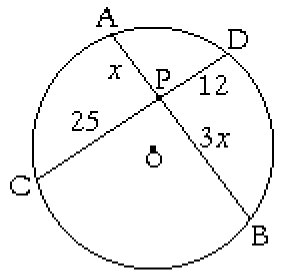
$$9 \bullet 2 = 3y \Rightarrow y = \frac{\cancel{9}^{3} \bullet 2}{1\cancel{3}} = 6$$

12. $z = ?$, $CD = ?$



$5z = 3 \bullet 15 \Rightarrow z = 9$

13. $x = ?$

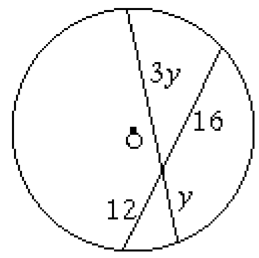


$x \bullet 3x = 25 \bullet 12$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{25 \bullet \cancel{12}^{4}}{1\cancel{3}} = 100 \quad /\sqrt{\ }$

$x = 10$

14. $y = ?$

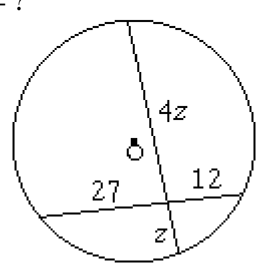


$3y^2 = 12 \bullet 16$

$y^2 = \dfrac{{}^{4}\cancel{12} \bullet 16}{1\cancel{3}} = 64 \quad /\sqrt{\ }$

$y = 8$

15. $z = ?$

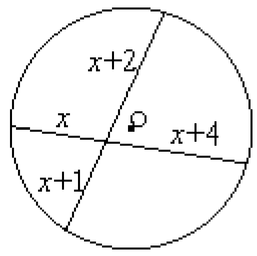


$4z^2 = 27 \bullet 12$

$z^2 = \dfrac{27 \bullet \cancel{12}^{3}}{1\cancel{4}} = 81 \quad /\sqrt{\ }$

$z = 9$

16. $x = ?$

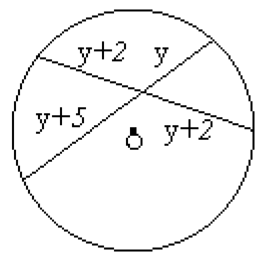


$x(x+4) = (x+2)(x+1)$

$\cancel{x^2} + {}^{x}\cancel{4x} = \cancel{x^2} + \underbrace{\cancel{(2+1)x}}_{3x \;\; 0x} + 2$

$x = 2$

17. $x = ?$

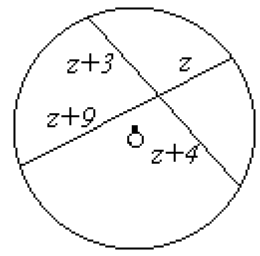


$(y+2)(y+2) = (y+5)y$

$\cancel{y^2} + {}^{0x}\cancel{4y} + 4 = \cancel{y^2} + \cancel{5y}_{1y}$

$4 = y$

18. $z = ?$



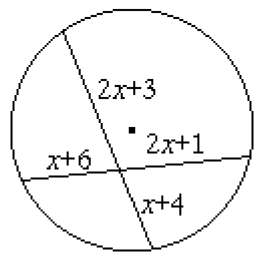
$(z+3)(z+4) = (z+9)z$

$\cancel{z^2} + {}^{0x}\cancel{7z} + 12 = \cancel{z^2} + \cancel{9z}_{2z}$

$12 = 2z$

$6 = z$

19. $x = ?$



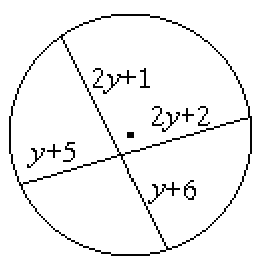
$(2x+3)(x+4) = (x+6)(2x+1)$

$2x^2 + 11x + 12 = 2x^2 + 13x + 6$

$6 = 2x$

$3 = x$

20. $y = ?$

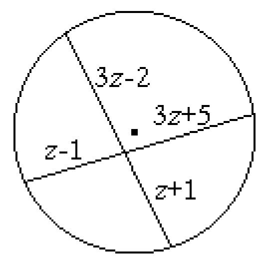


$(2y+1)(y+6) = (y+5)(2y+2)$

$2y^2 + 13y + 6 = 2y^2 + 12y + 10$

$y = 4$

21. $z = ?$

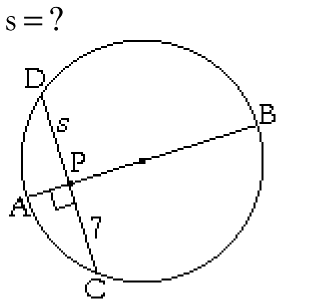


$(3z-2)(z+1) = (z-1)(3z+5)$

$3z^2 + z - 2 = 3z^2 + 2z - 5$

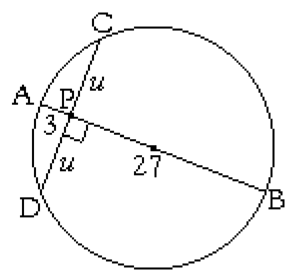
$3 = z$

22. $\overline{AB}$ diámetro. Si $PC = 7$; $s = ?$



La perpendicular que viene desde el centro siempre divide una cuerda por la mitad.
Por lo tanto, $s = 7$.

23. $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 3$ y $PB = 27$. $u = ?$



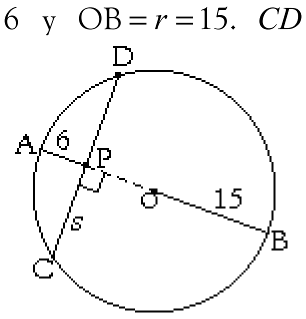
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$3 \bullet 27 = u^2$

$81 = u^2$

$9 = u$

24. $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 6$ y $OB = r = 15$. $\overline{CD} = ?$



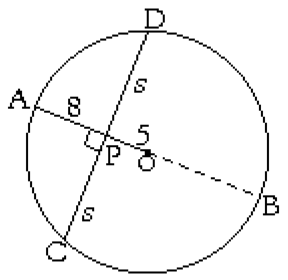
En esta ocasión usaremos:

$PC \bullet PD = r^2 - d^2$

$s^2 = (15)^2 - (9)^2 = 225 - 81 = 144$

$\Rightarrow s = 12 \Rightarrow \overline{CD} = 2s = 24$

25. $\overline{AB}$ diámetro. PO = 5; PA = 8 s = ?; CD = ?

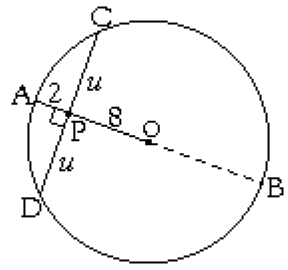


Primero identificamos:
– El radio: r = AO = 8 + 5 = 13.
– La distancia d de P al centro de la ⊗ es 5 ⇒ PO = d = 5.
– Luego, por potencia de un pto. interior a una ⊗:

$$Pot(P) = r^2 - d^2$$
$$= (13)^2 - (5)^2$$
$$= 169 - 25$$
$$= 144$$

– Y por teo. de las cuerdas:
PC • PD = 144
$s \bullet s = 144$
$s^2 = 144 \Rightarrow s = 12$
$\Rightarrow CD = 2s = 24$

26. $\overline{AB}$ diámetro. PO = 10; PA = 6. CD = ?

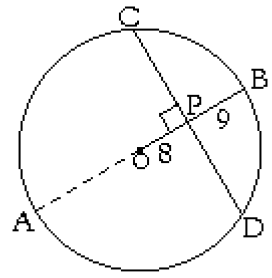


Primero identificamos:
– El radio: r = AO = 2 + 8 = 10.
– La distancia d de P al centro de la ⊗ es 6 ⇒ PO = d = 8.
– Luego, por potencia de un pto. interior a una ⊗:

$$Pot(P) = r^2 - d^2$$
$$= (10)^2 - (8)^2$$
$$= 100 - 64$$
$$= 36$$

– Y por teo. de las cuerdas:
PC • PD = 36
$u \bullet u = 36$; u = PC = PD
$u^2 = 36 \Rightarrow u = 6$
$\Rightarrow CD = 2u = 12$

27. $\overline{AB}$ diámetro. PB = 9; OP = 8; CD = ?



Primero identificamos:
– El radio: r = AO = 8 + 9 = 17.
– La distancia d de P al centro de la ⊗ es 8 ⇒ PO = d = 8.
– Y por potencia de un pto. interior a una ⊗:

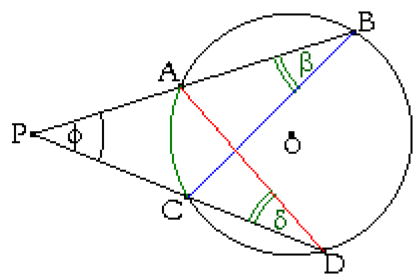
$$Pot(P) = r^2 - d^2$$
$$= (17)^2 - (8)^2$$
$$= 289 - 64$$
$$= 225$$

– Finalmente, por teo. de las cuerdas:
Sea x la medida de $\overline{CP} = \overline{PD}$
⇒ PC • PD = 125
$x \bullet x = 125$
$x^2 = 125 \Rightarrow x = 15$
$\Rightarrow CD = 2x = 30$

Volviendo con puntos de contenidos,…

4. Teorema de las Secantes

Dada la siguiente figura de la derecha, se puede probar que:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$.
Que es la misma expresión que teníamos para la igualdad de potencias de un punto en dos cuerdas, pero esta vez, como muestra la figura, será en dos secantes.



Veamos:
En la figura, tenemos el ΔPAD y el ΔPCB.
En ellos:

- $\beta = \delta$ por ser ∢s inscritos que subtienden el mismo arco de ⊗.
- Además comparten el ∢ ϕ, por estar este ángulo en ambos Δs.

Luego, por criterio de semejanza: ángulo – ángulo (A.A) se concluye que:
El ΔAPC ~ ΔBDP.

Esto implica que podemos formar la proporción:

$$\frac{\text{el lado exterior a la } \otimes \text{ del } \Delta PAD}{\text{el lado secante del } \Delta PAD} = \frac{\text{el lado exterior a la } \otimes \text{ del } \Delta PCB}{\text{el lado secante del } \Delta PCB}$$

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

Y efectuando el producto cruzado, obtenemos:

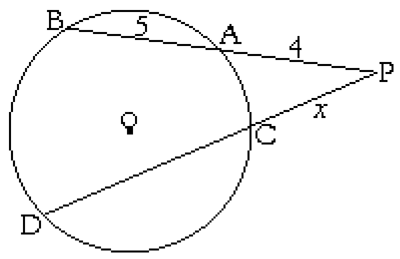
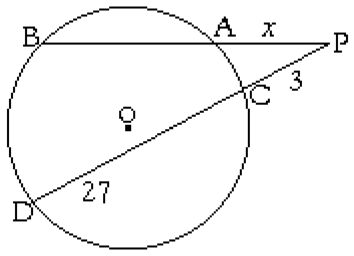
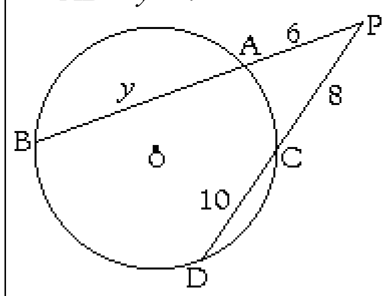
$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

Así como esta expresión en dos cuerdas se conoce como teorema de las cuerdas, nos resulta obvio entonces, la denominación de esta expresión en dos secantes. "Teorema de las secantes" y que se puede enunciar así:

"*Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de la medida de una secante por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su respectivo segmento exterior*"

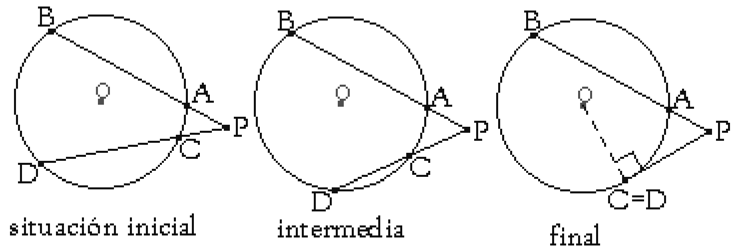
De aquí surgen una serie de ejercicios, de los cuales ilustraremos en principio, algunos a modo de ejemplos:

Ejemplos: (*las siguientes figuras no están a escala*)

i) Si $PA = 4;\ AB = 5;$ y $PD = 12;\ PC = x = ?$  Por teo. de las SECANTES: $PA \bullet PB = PC \bullet PD$ $4 \bullet (4+5) = x \bullet 12 \quad / :12$ $\frac{4 \bullet 9}{12} = x$ $\frac{36}{12} = x$ $3 = x$	ii) $PC = 3;\ CD = 27;\ PB = 15$ $PA = x = ?$  Por teo. de las SECANTES: $PA \bullet PB = PC \bullet PD$ $x \bullet 15 = 3 \bullet \underbrace{(3+27)}_{30} \quad / :12$ $15x = 90 \quad / :15$ $x = \frac{90}{15}$ $x = 6$	iii) $PA = 6;\ PC = 8;\ CD = 10$ $AB = y = ?$  Por teo. de las SECANTES: $PA \bullet PB = PC \bullet PD$ $6(y+6) = 8\underbrace{(8+10)}_{\bullet 18} \quad / :12$ $6y + 36 = 144$ $6x = 144 - 36 = 108 \quad / :6$ $x = \frac{108}{6} = 18$

5. Teorema de la secante con la tangente.

Si los dos puntos con que una secante corta a la circunferencia tuviesen libertad de moverse, uno hacia al otro y en la misma circunferencia, tendríamos una situación como la siguiente:



$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$PA \bullet PB = PC \bullet PC$

$PA \bullet PB = PC^2$

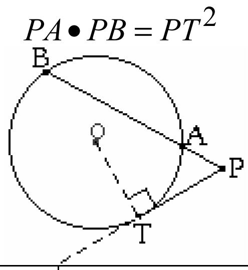
Las situaciones inicial e intermedia se conocen, como hemos visto, por teorema de las secantes.
La situación final nos queda con una sola secante y un segmento tangente debido a que C y D ocupan el mismo espacio. Es decir, son el mismo punto geométrico.

Debido a esto, es que podemos reemplazar en el teorema de las secantes, a D por C (o viceversa) quedándonos la expresión matemática:

$$PA \bullet PB = PC^2$$

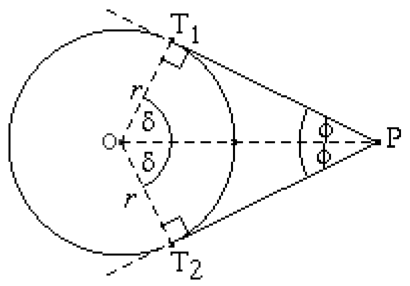
Conocida como "**Teorema de la secante con la tangente**".
Es frecuente que este teorema se presente gráfica y algebraicamente como:

$$PA \bullet PB = PT^2$$



6. Teorema de la tangente con la tangente

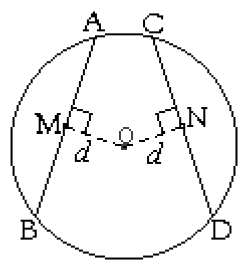
"Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes a ellas, entonces los segmentos de las tangentes son congruentes"



$\overline{PT_1} \cong \overline{PT_2}$

Además, $\overline{OP}$ biseca los ∢s del centro y del vértice.

7. Dos cuerdas congruentes tienen igual distancia al centro de la circunferencia.

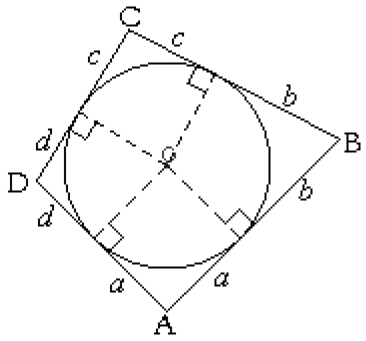


$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow$ MO = ON

8. Cuadrilátero Circunscrito

Un cuadrilátero cuyos lados son todos tangentes a una circunferencia se dice que está circunscrito o es circunscriptible a ella.

Ahora bien, en todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, **la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados opuestos.**

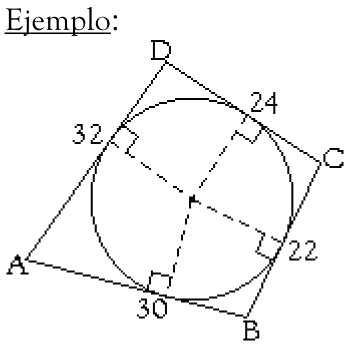


$$AB + CD = BC + DA$$

$$(a+b)+(c+d)=(b+c)+(d+a)$$

En la figura: a, b, c y d son segmentos de los lados del cuadrilátero.

Ejemplo:



$$AB + CD = BC + DA$$

$$30 + 24 = 22 + 32$$

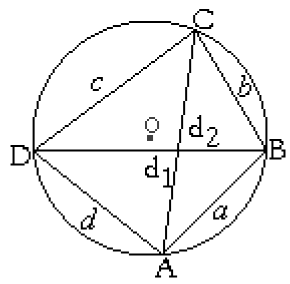
$$54 = 54$$

9. Teorema de Ptolomeo

Recordemos que, un cuadrilátero se dice que está inscrito a una circunferencia si todos sus vértices se hallan sobre la misma.

Siendo así, Ptolomeo de Alejandría presentó en su libro "Almagesto" 150 D.C. que:

"En todo cuadrilátero inscrito en la circunferencia, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuesto"

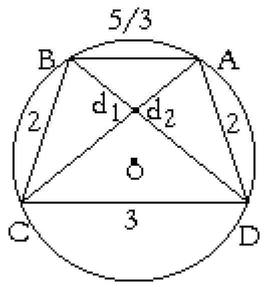


En la figura: a, b, c y d son segmentos de los lados del cuadrilátero, d_1 y d_2 sus diagonales.

$$d_1 \bullet d_2 = ac + bd$$

Ejemplo:

En el trapecio isósceles ABCD las diagonales d_1 y d_2 son iguales ¿Cuánto mide cada una?



Solución:

$d_1 \bullet d_2 = ac + bd$ con $d_1 = d_2$

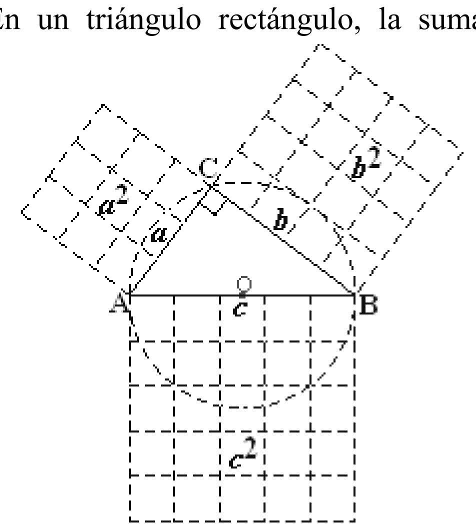
$$(d_1)^2 = 2 \bullet 2 + 3 \bullet \frac{5}{3} = 4 + 5 = 9 \xrightarrow[\sqrt{\ }]{} d_1 = d_2 = 3$$

Cada diagonal mide 3.

El teorema de Ptolomeo se reduce *a lo más*, a una curiosidad en la actualidad.

10. Teorema Particular de Pitágoras

"En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa."



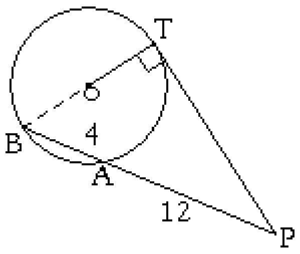
La figura ilustra además, como el teorema de Pitágoras se presenta y visualiza en torno a una circunferencia.

Ejercicios de Aplicación del teorema particular de Pitágoras

(*Las siguientes figuras no están a escala*)

i) $r = ?$

Hint.: Usar teo. de Pitágoras y secante con tagente.



Solución:

Aplicando Pitágoras en ΔPTB, rectángulo en T. Tenemos:

$$PB^2 = PT^2 + TB^2$$

Y aplicando teo. secante con tangente en esta igualdad, obtenemos:

$$PB^2 = PA \bullet PB + TB^2$$

Reemplazando valores:

$$\Big(\underbrace{12+4}_{16}\Big)^2 = 12\Big(\underbrace{12+4}_{16}\Big) + BT^2$$

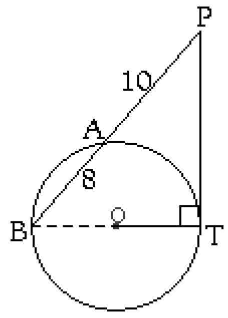
$$256 = 192 + BT^2$$

$$\Rightarrow BT^2 = 256 - 192$$
$$= 64$$

$$\Rightarrow \quad BT = 8$$

$$\Rightarrow r = \frac{BT}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

ii) $r = ?$



Solución:

Por Pitágoras en ΔPTB:

$$PB^2 = PT^2 + TB^2$$

Y por teo. secante con tangente::

$$PB^2 = PA \bullet PB + TB^2$$

Reemplazando los valores:

$$\Big(\underbrace{10+8}_{18}\Big)^2 = 10\Big(\underbrace{10+8}_{18}\Big) + BT^2$$

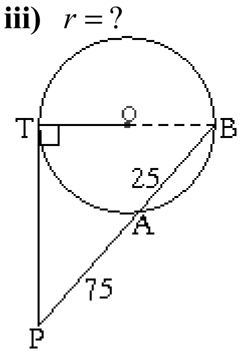
$$324 = 180 + BT^2$$

$$\Rightarrow BT^2 = 324 - 180$$
$$= 144 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad BT = 12$$

$$\Rightarrow r = \frac{BT}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

iii) $r = ?$



Solución:

Por Pitágoras en ΔPTB:

$$PB^2 = PT^2 + TB^2$$

Y por teo. secante con tangente::

$$PB^2 = PA \bullet PB + TB^2$$

Reemplazando los valores:

$$\Big(\underbrace{75+25}_{100}\Big)^2 = 75\Big(\underbrace{75+25}_{100}\Big) + BT^2$$

$$10.000 = 7.500 + BT^2$$

$$\Rightarrow BT^2 = 10.000 - 7.500$$
$$= 2.500 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad BT = 50$$

$$\Rightarrow r = \frac{BT}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

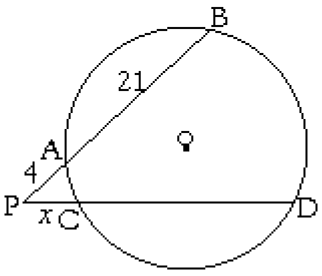
Relaciones Métricas en la Circunferencia

Listado nº 2: Ejercicios Propuestos

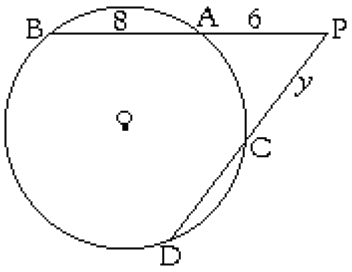
Nombre: ________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Ejercicios: (*Las siguientes figuras no están a escala*)

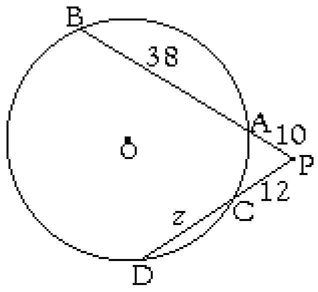
1. Si $PA = 4;\ AB = 5;\ PD = 20$
$PC = x = ?$



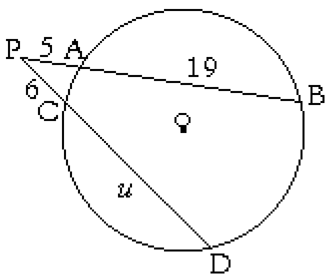
2. $PA = 6;\ AB = 8;\ PD = 12$
$PC = y = ?$



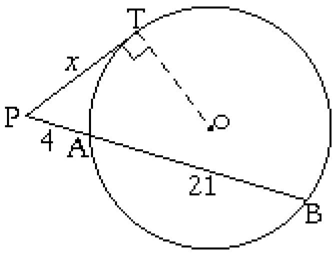
3. $PA = 10;\ CD = 38;\ PC = 12$
$CD = z = ?$



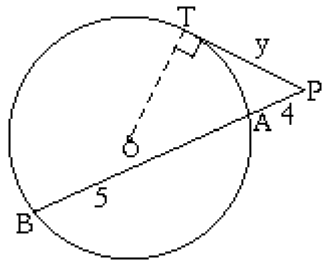
4. $PA = 5;\ AB = 19;\ PC = 6$
$CD = u = ?;\ \ PC = ?$



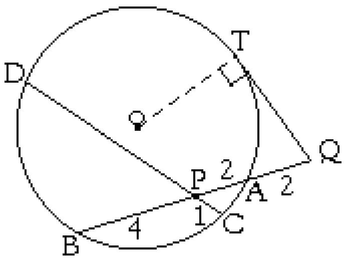
5. $PA = 4;\ AB = 21;\ \ PT = x = ?$



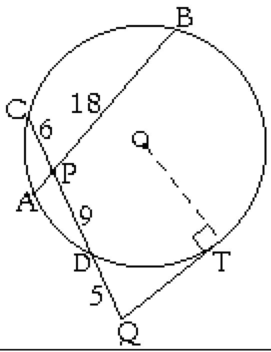
6. $PA = 4;\ AB = 5;\ \ PT = y = ?$



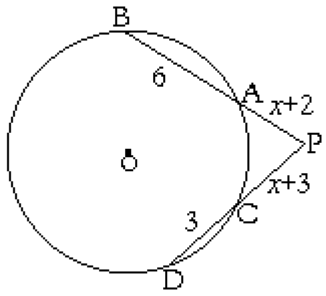
7. $PD = ?$ y $QT = ?$



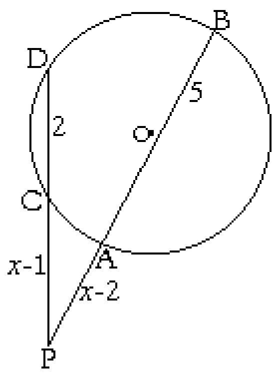
8. $PA = ?$ y $QT = ?$



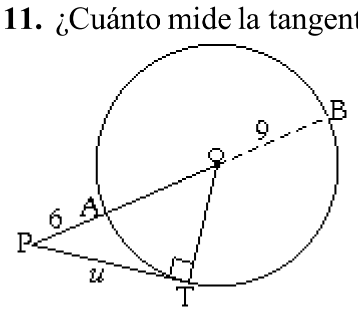
9. $x = ?; PA = ?; PB = ?; PC = ?$



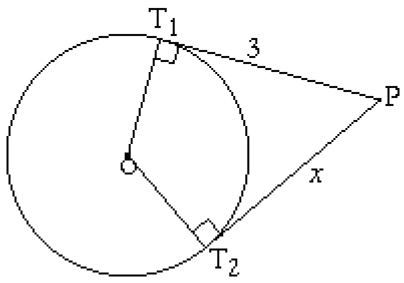
10. $x = ?;\ \mathrm{Pot(P)} = ?$



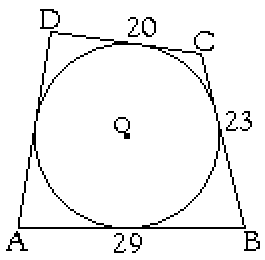
11. ¿Cuánto mide la tangente $\overline{PT}$?



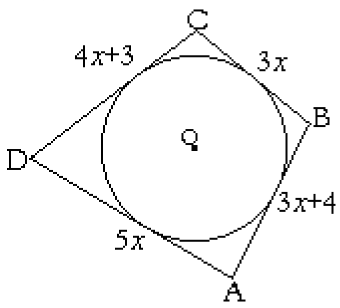
12. $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ son tangentes.
$PT_2 = x = ?$



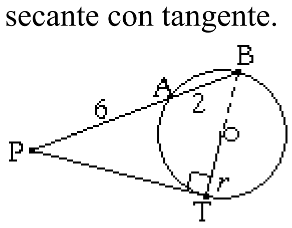
13. $AB = 29; BC = 23; CD = 20$
$AD = ?$



14. $x = ?$



15. $PA = 6;\ \ AB = 2;\ \ r = ?$
Hint.: Usar teo. de Pitágoras y secante con tangente.



Relaciones Métricas en la Circunferencia

<u>Solucionario Listado nº 2: Ejercicios Propuestos</u>

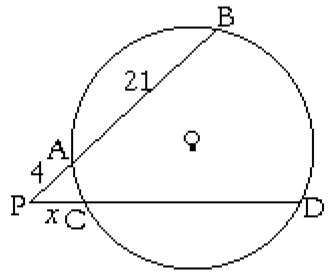
Nombre: ___________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

<u>Ejercicios</u>: (*Las siguientes figuras no están a escala*)

<table>
<tr>
<td>

i) Si $PA = 4;\ AB = 5;\ PD = 20$

$PC = x = ?$



<u>Solución</u>:

$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

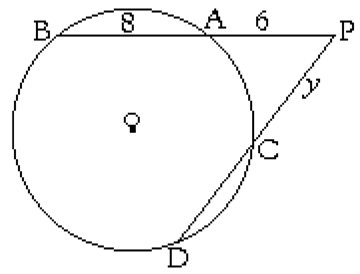
$4\underbrace{(4+21)}_{25} = 20x$

$100 = 20x \Rightarrow x = 100/20 = 5$

</td>
<td>

ii) $PA = 6;\ AB = 8;\ PD = 12$

$PC = y = ?$



<u>Solución</u>:

$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

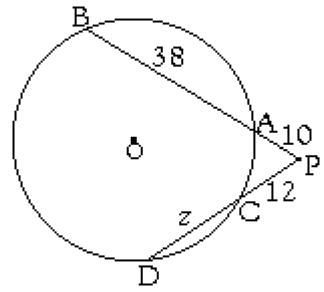
$6\underbrace{(6+8)}_{14} = 12y$

$84 = 12y \Rightarrow y = 84/12 = 7$

</td>
<td>

iii) $PA = 10;\ CD = 38;\ PC = 12$

$CD = z = ?$



<u>Solución</u>:

$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

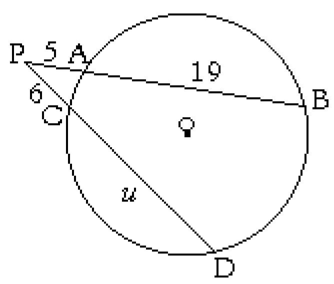
$10\underbrace{(10+38)}_{48} = 12(z+12) \qquad /:12$

$\underbrace{\frac{10\bullet \cancel{48}^{4}}{{}_{1}\cancel{12}}}_{40} = z+12 \Rightarrow z = 40-12 = 28$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

iv) $PA = 5;\ AB = 19;\ PC = 6$

$CD = u = ?;\ PC = ?$



<u>Solución</u>:

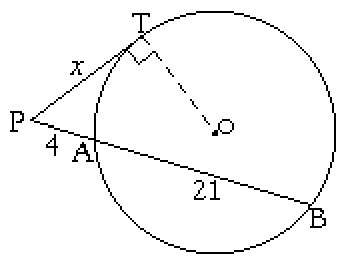
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$5\underbrace{(5+19)}_{24} = 6(6+u) \qquad /:6$

$\underbrace{\frac{5\bullet \cancel{24}^{4}}{{}_{1}\cancel{6}}}_{20} = 6+u \Rightarrow u = 20-6 = 14$

</td>
<td>

v) $PA = 4;\ AB = 21;\ PT = x = ?$



<u>Solución</u>:

$PA \bullet PB = PT$

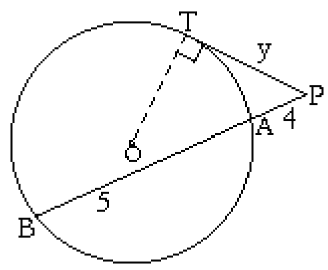
$4\underbrace{(4+21)}_{25} = x^2$

$100 = x^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$10 = x$

</td>
<td>

vi) $PA = 4;\ AB = 5;\ PT = y = ?$



<u>Solución</u>:

$PA \bullet PB = PT$

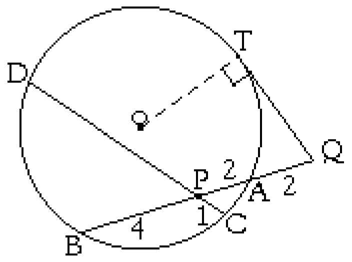
$4\underbrace{(4+5)}_{9} = y^2$

$36 = x^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$6 = x$

</td>
</tr>
</table>

vii) PD = ? y QT = ?



Solución:
Por teo. de cuerdas
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$2 \bullet 4 = 1 \bullet \text{PD} \Rightarrow \text{PD} = 8$

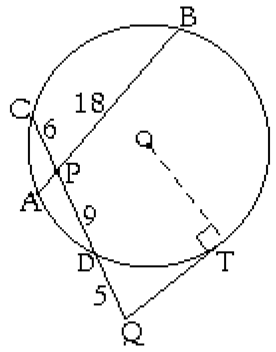
Y por teorema de la secante con la tangente:

$QA \bullet QB = QT^2$

$2\left(\underbrace{2+2+4}_{8}\right) = QT^2$

$16 = QT^2 \Rightarrow \text{QT} = 4$

viii) PA = ? y QT = ?



Solución:
Por teo. de cuerdas
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$PA \bullet 18 = 6 \bullet 9 \Rightarrow \text{PA} = \dfrac{6 \bullet \cancel{9}^{1}}{{}_{2}\cancel{18}} = 3$

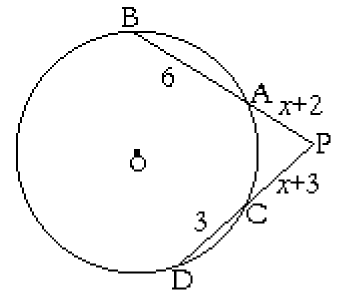
Y por teorema de la secante con la tangente:

$QD \bullet QC = QT^2$

$5\left(\underbrace{5+9+6}_{20}\right) = QT^2$

$100 = QT^2 \Rightarrow \text{QT} = 10$

ix) x = ?; PA = ?; PB = ?; PC = ?



Solución:

$\text{PA} \bullet \text{PB} = \text{PC} \bullet \text{PD}$

$(x+2)\left(x+\underbrace{2+6}_{8}\right) = (x+3)\left(x+\underbrace{3+3}_{6}\right)$

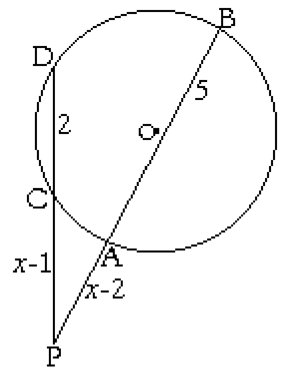
$(x+2)(x+8) = (x+3)(x+6)$

$\cancel{x^2} + 10x + 16 = \cancel{x^2} + 9x + 18$

Cancelando términos semejantes :

$x = 2$

x) x = ?; Pot(P) = ?



Solución:

$\text{PA} \bullet \text{PB} = \text{PC} \bullet \text{PD}$

$(x-2)(x+3) = (x-1)(x+1)$

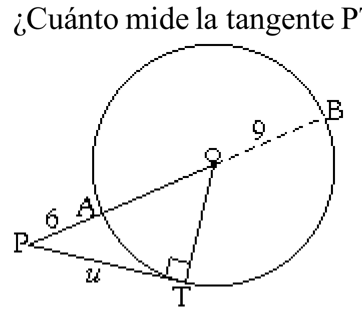
$\cancel{x^2} + x - 6 = \cancel{x^2} - 1$

$x = 6 - 1 = 5$

Reemplazando este valor en:

$\text{Pot(P)} = \text{PA} \bullet \text{PB} = (x-2)(x+3)$
$= (5-2)(5+3)$
$= 3 \bullet 8$
$= 24$

xi) ¿Cuánto mide la tangente $\overline{\text{PT}}$?



Solución:

$PT^2 = PA \bullet PB$

$u^2 = 6\left(\underbrace{6+18}_{24}\right) = 144 \quad /\sqrt{\ }$

$\Rightarrow u = 12$

$\Rightarrow$ La tangente $\overline{PT}$ mide 12.

También podíamos emplear:

$PT^2 = Pot(P)$

$u^2 = d^2 - r^2$

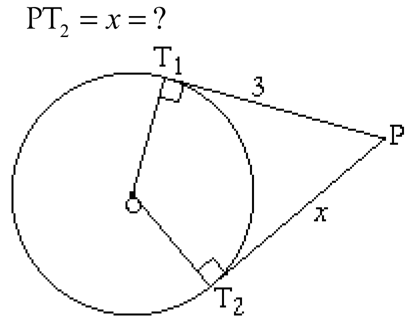
$= \left(\underbrace{6+9}_{15}\right)^2 - 9^2$

$= 225 - 81$

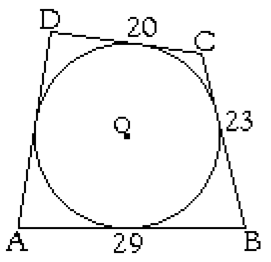
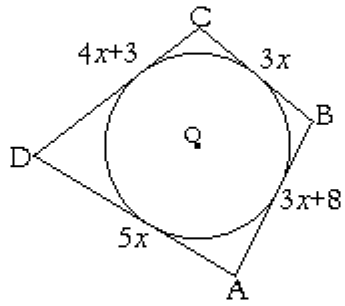
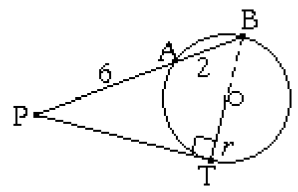
$= 144 \quad /\sqrt{\ }$

$u = 12$

xii) $\overline{\text{PT}_1}$ y $\overline{\text{PT}_2}$ son tangentes.
$\text{PT}_2 = x = ?$



Solución:
Por teo. de la tangente con la tangente: $\overline{PT_1} \cong \overline{PT_2} \Rightarrow 3 = x$

xiii) $AB = 29; BC = 23; CD = 20$ $AD = ?$ El cuadrilátero está circunscrito a la ⊗.  Solución: Debido a que en todo cuadrilátero circunscrito a una ⊗, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados opuestos, tenemos: $AB + CD = BC + DA$ $\underbrace{29+20}_{49} = 23 + DA$ $\Rightarrow DA = 49 - 23 = 26$	**xiv)** $x = ?$ ¿Cuánto mide cada lado del cuadrilátero circunscrito a la ⊗?  Solución: $AB + CD = BC + DA$ $(3x+8)+(4x+3) = 3x + 5x$ Reduciendo términos semejantes: $7x + 11 = 8x$ Cancelando $7x$ lado a lado: $11 = x$ Reemplazando el valor hallado: $AB = 3\bullet 11 + 8 = 41$; $BC = 33$; $CD = 47$; $AD = 55$	**xv)** $PA = 6$; $AB = 2$; $r = ?$ Hint.: Usar teo. De Pitágoras y secante con tangente.  Solución: Aplicando Pitágoras en ΔPTB, rectángulo en T. Tenemos: $PB^2 = PT^2 + TB^2$ Y aplicando teo. secante con tangente en esta igualdad, obtenemos: $PB^2 = PA \bullet PB + TB^2$ Reemplazando valores: $\left(\underbrace{6+2}_{8}\right)^2 = 6\left(\underbrace{6+2}_{8}\right) + BT^2$ $64 = 48 + BT^2 \Rightarrow BT^2 = 64 - 48 = 16$ $\Rightarrow BT = 4$ $\Rightarrow r = \frac{BT}{2} = \frac{4}{2} = 2$

A continuación se presenta como alternativa, un listado nº 2 de ejercicios que no comprende la aplicación del teorema de Pitágoras.

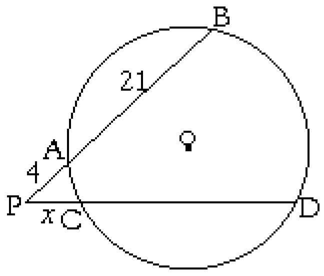
Relaciones Métricas en la Circunferencia

Listado nº 2 (Alternativo): Ejercicios Propuestos

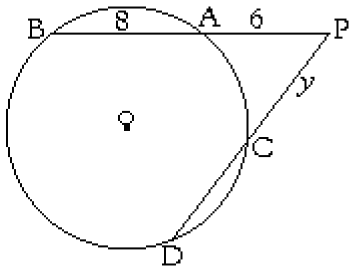
Nombre: ____________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Ejercicios: (*Las siguientes figuras no están a escala*)

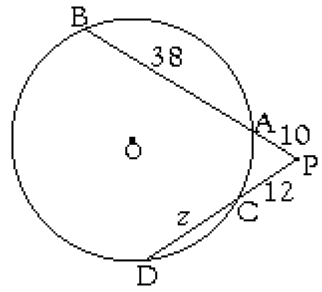
1. Si $PA = 4;\ AB = 5;\ PD = 20$
$PC = x = ?$



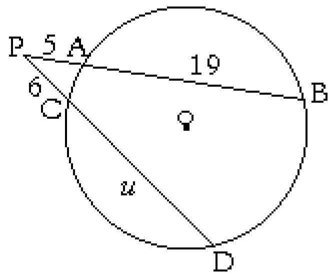
2. $PA = 6;\ AB = 8;\ PD = 12$
$PC = y = ?$



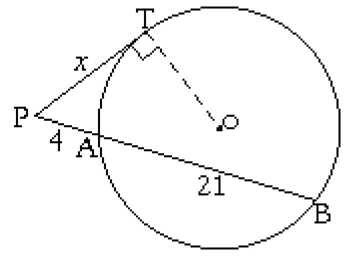
3. $PA = 10;\ CD = 38;\ PC = 12$
$CD = z = ?$



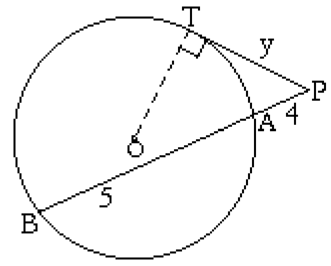
4. $PA = 5;\ AB = 19;\ PC = 6$
$CD = u = ?;\ \ PC = ?$



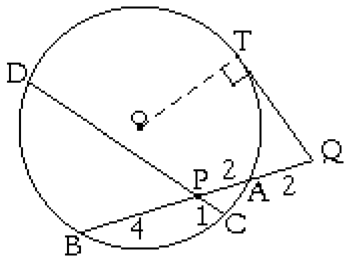
5. $PA = 4;\ AB = 21;\ \ PT = x = ?$



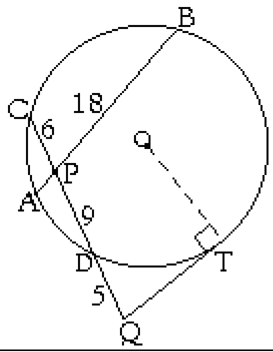
6. $PA = 4;\ AB = 5;\ \ PT = y = ?$



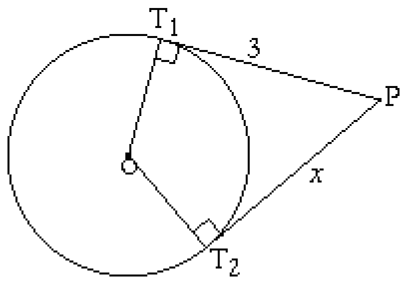
7. $PD = ?$ y $QT = ?$



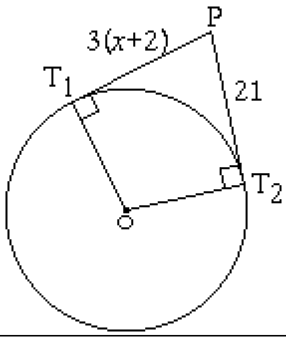
8. $PA = ?$ y $QT = ?$



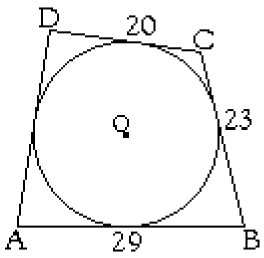
9. $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ son tangentes.
$PT_2 = x = ?$



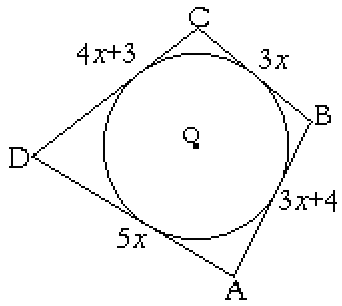
10. $x = ?;\ \ PT_1 = ?$



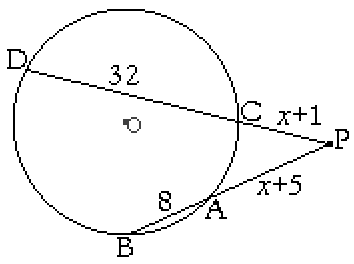
11. $AB = 29; BC = 23; CD = 20$
$AD = ?$



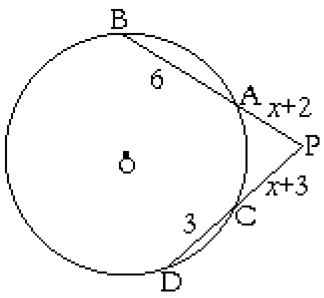
12. $x = ?$



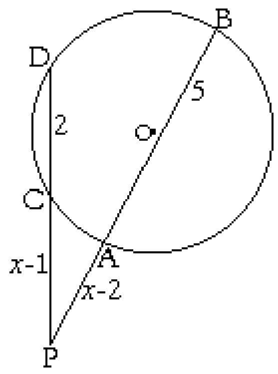
13. $x = PC = ?;\ \ PA = ?$



14. $x = ?; PA = ?; PB = ?; PC = ?$



15. $x = ?;\ \ Pot(P) = ?$



Relaciones Métricas en la Circunferencia

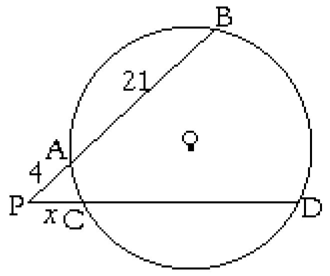
Solucionario Listado nº 2 (Alternativo): Ejercicios Resueltos

Nombre: ________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Ejercicios: (*Las siguientes figuras no están a escala*)

i) Si PA = 4; AB = 5; PD = 20

PC = x = ?



Solución:

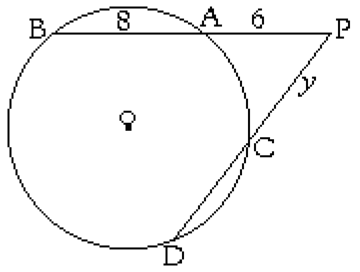
$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

$$4\underbrace{(4+21)}_{25} = 20x$$

$$100 = 20x \Rightarrow x = 100/20 = 5$$

ii) PA = 6; AB = 8; PD = 12

PC = y = ?



Solución:

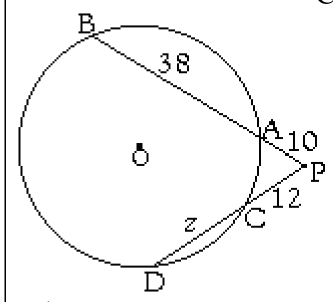
$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

$$6\underbrace{(6+8)}_{14} = 12y$$

$$84 = 12y \Rightarrow y = 84/12 = 7$$

iii) PA = 10; CD = 38; PC = 12

CD = z = ?



Solución:

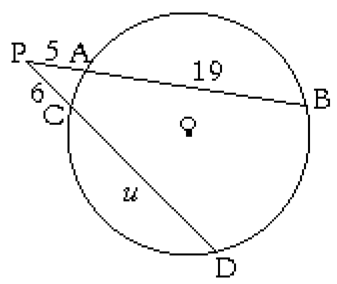
$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

$$10\underbrace{(10+38)}_{48} = 12(z+12) \qquad / :12$$

$$\underbrace{\frac{10 \bullet \cancel{48}^{4}}{{}_{1}\cancel{12}}}_{40} = z+12 \Rightarrow z = 40-12 = 28$$

iv) PA = 5; AB = 19; PC = 6

CD = u = ?; PC = ?



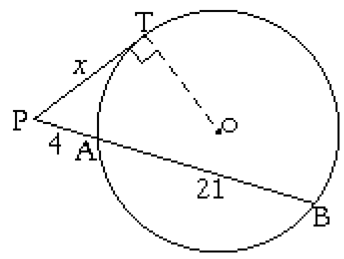
Solución:

$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

$$5\underbrace{(5+19)}_{24} = 6(6+u) \qquad / :6$$

$$\underbrace{\frac{5 \bullet \cancel{24}^{4}}{{}_{1}\cancel{6}}}_{20} = 6+u \Rightarrow u = 20-6 = 14$$

v) PA = 4; AB = 21; PT = x = ?



Solución:

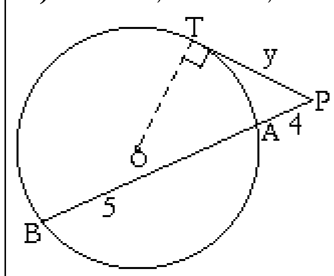
$$PA \bullet PB = PT$$

$$4\underbrace{(4+21)}_{25} = x^2$$

$$100 = x^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$10 = x$$

vi) PA = 4; AB = 5; PT = y = ?



Solución:

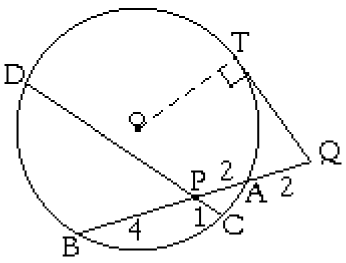
$$PA \bullet PB = PT$$

$$4\underbrace{(4+5)}_{9} = y^2$$

$$36 = x^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$6 = x$$

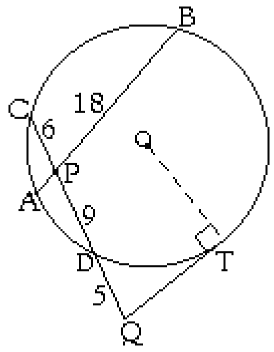
vii) PD = ? y QT = ?



Solución:
Por teo. de cuerdas
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$2 \bullet 4 = 1 \bullet \text{PD} \Rightarrow \text{PD} = 8$

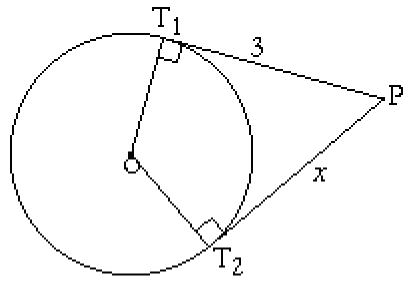
Y por teorema de la secante con la tangente:
$QA \bullet QB = QT^2$
$$2\left(\underbrace{2+2+4}_{8}\right) = QT^2$$
$$16 = QT^2 \Rightarrow \text{QT} = 4$$

viii) PA = ? y QT = ?



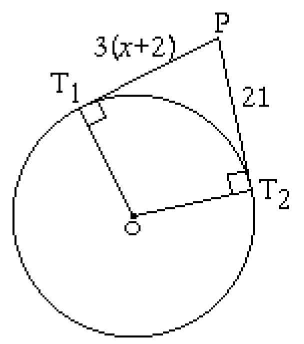
Solución:
Por teo. de cuerdas
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$$PA \bullet 18 = 6 \bullet 9 \Rightarrow \text{PA} = \frac{6 \bullet \cancel{9}^{1}}{{}_{2}\cancel{18}} = 3$$
Y por teorema de la secante con la tangente:
$QD \bullet QC = QT^2$
$$5\left(\underbrace{5+9+6}_{20}\right) = QT^2$$
$$100 = QT^2 \Rightarrow \text{QT} = 10$$

ix) $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ son tangentes.
$PT_2 = x = ?$



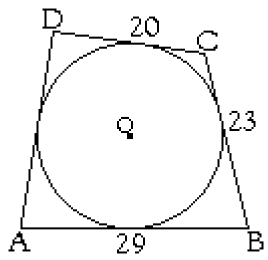
Solución:
Por teo. de la tangente con la tangente: $\overline{PT_1} \cong \overline{PT_2} \Rightarrow 3 = x$

x) $x = ?$; $PT_1 = ?$



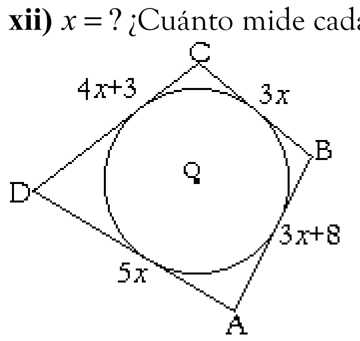
Solución:
Por los ∢s rectos, $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ son segmentos tangentes:
$$\overline{PT_1} \cong \overline{PT_2} \Rightarrow 3(x+2) = 21$$
$$3x + 6 = 21$$
$$3x = 21 - 6 = 15$$
$$x = \frac{15}{3} = 5$$

xi) AB = 29; BC = 23; CD = 20
AD = ?



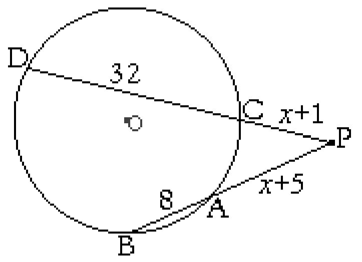
Solución:
Debido a que en todo cuadrilátero circunscrito a una ⊗, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados opuestos, tenemos:
AB + CD = BC + DA
$$\underbrace{29+20}_{49} = 23 + \text{DA}$$
$$\Rightarrow \text{DA} = 49 - 23 = 26$$

xii) $x = ?$ ¿Cuánto mide cada lado?



Solución:
AB + CD = BC + DA
$(3x+8)+(4x+3) = 3x+5x$
Reduciendo términos semejantes:
$7x + 11 = 8x$
Cancelando $7x$ lado a lado:
$11 = x$
Reemplazando el valor hallado:
AB = 3•11 + 8 = 41; BC = 33;
CD = 47; AD = 55

xiii) $x = PC = ?;\ PA = ?$



Solución:

$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

$$(x+5)\left(x\underbrace{+5+8}_{13}\right) = (x+1)(x+33)$$

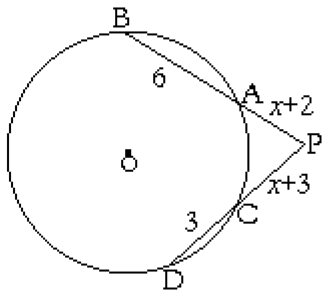
$$(x+5)(x+13) = x^2 + 34x + 33$$

$$x^2 + 18x + 65 = \cancel{x^2} + 34x + 33$$

$$32 = 16x$$

$$\frac{32}{16} = x \Rightarrow x = 2$$

xiv) $x = ?; PA = ?; PB = ?; PC = ?$



Solución:

$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

$$(x+2)\left(x+\underbrace{2+6}_{8}\right) = (x+3)\left(x+\underbrace{3+3}_{6}\right)$$

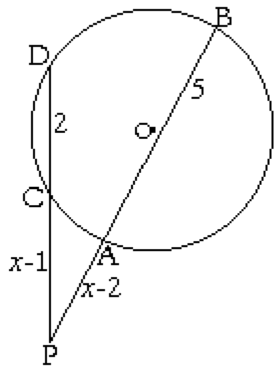
$$(x+2)(x+8) = (x+3)(x+6)$$

$$\cancel{x^2} + 10x + 16 = \cancel{x^2} + 9x + 18$$

Cancelando términos semejantes :

$$x = 2$$

xv) $x = ?;\ \mathrm{Pot}(P) = ?$



Solución:

$$PA \bullet PB = PC \bullet PD$$

$$(x-2)(x+3) = (x-1)(x+1)$$

$$\cancel{x^2} + x - 6 = \cancel{x^2} - 1$$

$$x = 6 - 1 = 5$$

Reemplazando este valor en:

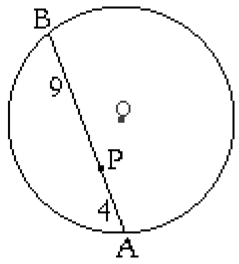
$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}(P) = PA \bullet PB &= (x-2)(x+3) \\ &= (5-2)(5+3) \\ &= 3 \bullet 8 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Relaciones Métricas en la Circunferencia

Listado nº 3: Ejercicios Resueltos

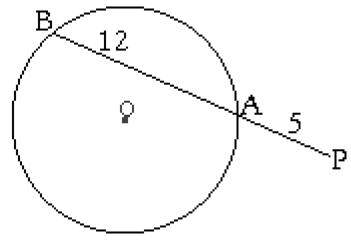
Ejercicios: (*Las siguientes figuras no están a escala*)

i) Si $PA = 4$ y $PB = 9$
Halle la $Pot(P) = PA \bullet PB$



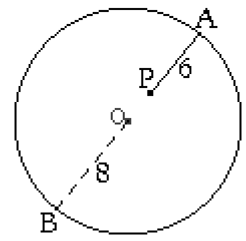
Solución:
$Pot(P) = PA \bullet PB$
$= 4 \bullet 9$
$= 36$

ii) $PA = 5$ y $AB = 12$;
La $Pot(P) = PA \bullet PB = ?$



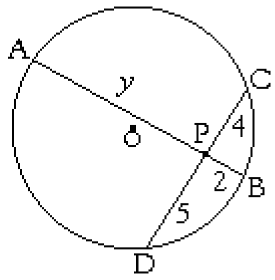
Solución:
$Pot(P) = PA \bullet PB$
$= 5 \bullet (5+12)$
$= 5 \bullet 17$
$= 85$

iii) $AP = 6$ y $r = OB = 8$;
La $Pot(P) = PA \bullet PB = ?$



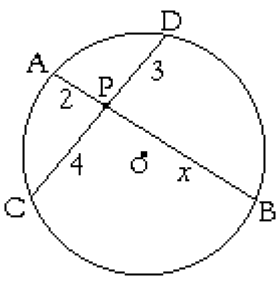
Solución:
$Pot(P) = PA \bullet PB$
Nos falta la medida de un tramo de PB. Es la que falta para completar la medida del radio $r = 8$, que va de A a O y debe ser 2, pues 6 +2 = 8.
Por lo tanto:
$PB = PO + r = 2 + 8 = 10.$
Así,
$Pot(P) = PA \bullet PB = 6 \bullet 10 = 60$
También podemos emplear:
$Pot(P) = r^2 - d^2 = 8^2 - 2^2$
$= 64 - 4 = 60$

iv) $PA = y = ?$



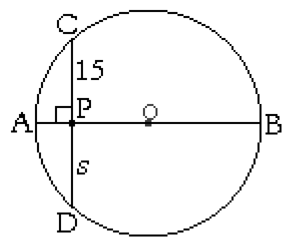
Solución:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$$\left.\begin{array}{l} y \bullet 2 = 4 \bullet 5 \\ 2y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$$

v) $PB = x = ?$



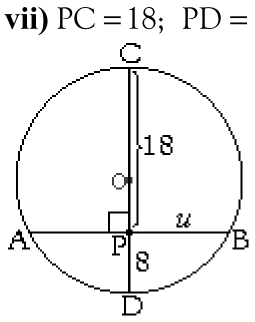
Solución:
Por teo. de las cuerdas:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$$\left.\begin{array}{l} 2x = 4 \bullet 3 \\ 2x = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$$

vi) $\overline{AB}$ diámetro. Si $PC = 15$;
$s = ?$



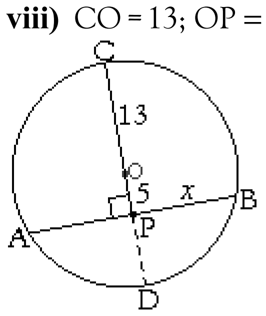
Solución:
Toda perpendicular a una cuerda que viene desde el centro la divide siempre por la mitad.
Por lo tanto, $s = 15$.

vii) $PC = 18$; $PD = 8$; $u = ?$;



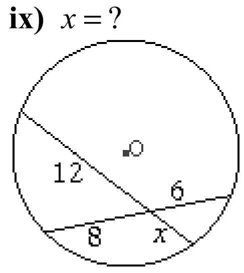
Solución:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$u^2 = 18 \bullet 8$
$u^2 = 81$
$u = 9 \Rightarrow \overline{AB} = 2u = 18$

viii) $\overline{CO} = 13$; $OP = 5$; $CD = ?$



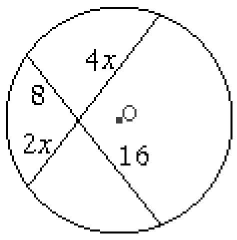
Solución:
$PA \bullet PB = Pot(P)$
$u^2 = 13^2 - 5^2$
$u^2 = 169 - 25 = 144 \quad /\sqrt{\ }$
$u = 12 \Rightarrow \overline{AB} = 2u = 24$

ix) $x = ?$



Solución:
$12x = 8 \bullet 6$
$$x = \frac{8 \bullet \cancel{6}^{1}}{{}_{2}\cancel{12}} = \frac{8}{2} = 4$$

x) $x = ?$



Solución:

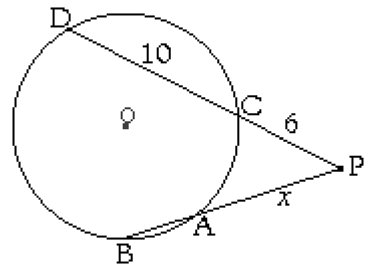
$2x \bullet 4x = 8 \bullet 16$

$\cancel{8}x^2 = \cancel{8} \bullet 16 \quad /\sqrt{\ }$

$\Rightarrow x = 4$

xi) $PC = 6;\ CD = 10;\ PB = 12$

$PA = x = ?$



Solución:

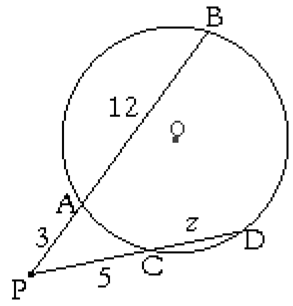
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$x \bullet 12 = 6\left(\underbrace{6+10}_{16}\right)$

$x = \frac{{}^{1}\cancel{6} \bullet 16}{\cancel{12}_{2}} = \frac{16}{2} = 8$

xii) $PA = 3;\ AB = 12;\ PC = 5$

$CD = z = ?;\ \ PD = ?$



Solución:

$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$3\left(\underbrace{3+12}_{15}\right) = 5(5+z)$

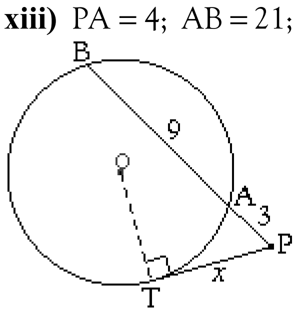
$\frac{3 \bullet \cancel{15}^{3}}{{}_{1}\cancel{5}} = 5 + z$

$9 = 5 + z$

$\Rightarrow 9 - 5 = 4 = z$

$\Rightarrow PD = 5 + 4 = 9$

xiii) $PA = 4;\ AB = 21;\ PT = x = ?$



Solución:

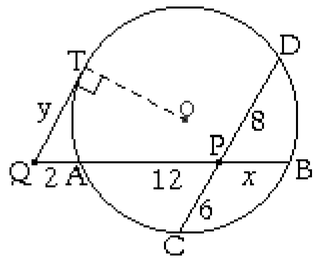
$PA \bullet PB = PT$

$3\left(\underbrace{3+9}_{12}\right) = x^2$

$36 = x^2 \quad /\sqrt{\ }$

$6 = x$

xiv) $PB = x = ?;\ \ QT = y = ?$



Solución:

Por teo. de cuerdas

$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$12x = 6 \bullet 8$

$\Rightarrow x = \frac{{}^{1}\cancel{6} \bullet 8}{\cancel{12}_{2}} = \frac{8}{2} = 4$

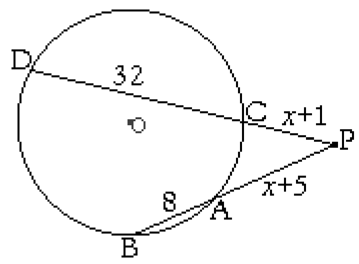
Y por teorema de la secante con la tangente:

$QA \bullet QB = QT^2$

$2\left(\underbrace{2+12+4}_{18}\right) = QT^2$

$36 = QT^2 \Rightarrow QT = 6$

xv) $x = ?$



Solución:

$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

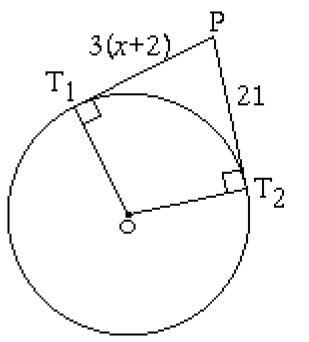
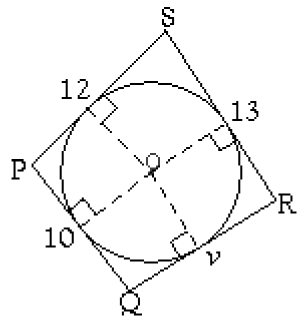
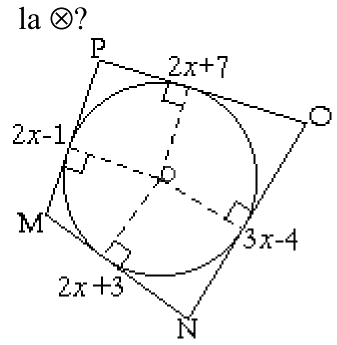
$(x+5)\left(\underbrace{x+5+8}_{13}\right) = (x+1)(x+33)$

$(x+5)(x+13) = x^2 + 34x + 33$

$x^2 + 18x + 65 = \cancel{x^2} + 34x + 33$

$32 = 16x$

$\frac{32}{16} = x \Rightarrow x = 2$

xvi) $x=?$  <u>Solución</u>: Por los $\sphericalangle s$ rectos, $\overline{\mathrm{PT}_1}$ y $\overline{\mathrm{PT}_2}$ son segmentos tangentes: $\overline{\mathrm{PT}_1} \cong \overline{PT_2}$ $\Rightarrow 3(x+2)=21 \quad /:3$ $x+2=7$ $x=7-2$ $=5$	**xvii)** $\mathrm{PQ}=10;\ \mathrm{RS}=13;\ \mathrm{SP}=12$ $\mathrm{QR}=v=?$  <u>Solución</u>: Debido a que en todo cuadrilátero circunscrito a una ⊗, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados opuestos, tenemos: $\mathrm{PQ}+\mathrm{RS}=\mathrm{QR}+\mathrm{SP}$ $\underbrace{10+13}_{23}=v+12$ $\Rightarrow QR=23-12=11$	**xviii)** $x=?$ ¿Cuánto mide cada lado del cuadrilátero circunscrito a la ⊗?  <u>Solución</u>: $\mathrm{MN}+\mathrm{OP}=\mathrm{NO}+\mathrm{PM}$ $(2x+3)+(2x+7)=(3x-4)+(2x-1)$ Reduciendo términos semejantes: $4x+10=5x-5$ Cancelando $4x$ lado a lado y despejando: $15=x$ Reemplazando el valor hallado: $\mathrm{MN}=2\bullet 15+3=33;\ \ \mathrm{NO}=41;$ $\mathrm{OP}=37;\ \ \mathrm{PM}=29$

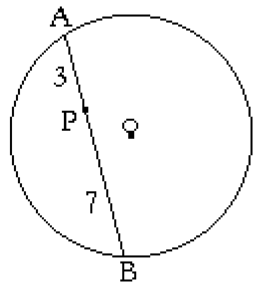
Relaciones Métricas en la Circunferencia

Listado nº 4: Ejercicios Propuestos

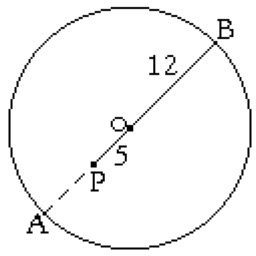
Nombre: ____________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Ejercicios: (*Las siguientes figuras no están a escala*)

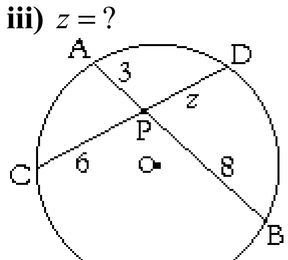
i) $AP = 3;\ PB = 7;\ Pot(P) = ?$



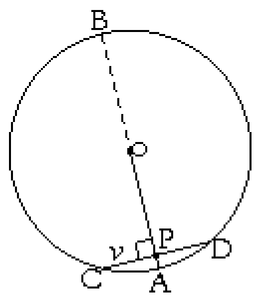
ii) $PO = 5;\ OB = 12;\ Pot(P) = ?$



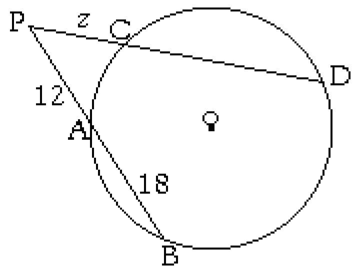
iii) $z = ?$



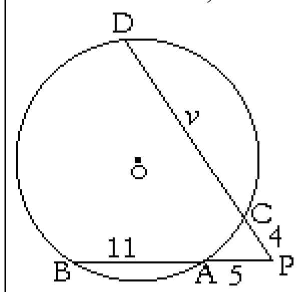
iv) Si $AP = 2$ y $PO = 15$; ¿Cuánto mide la cuerda $\overline{CD}$?



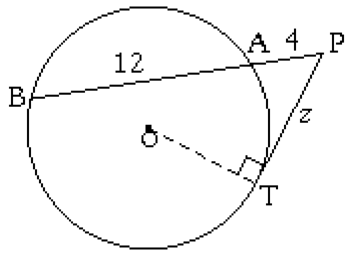
v) $PA = 12;\ AB = 18;\ PD = 36$
$PC = z = ?$



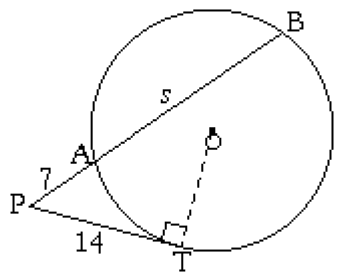
vi) $PA = 5;\ AB = 19;\ PC = 6$
$CD = u = ?;\ \ PC = ?$



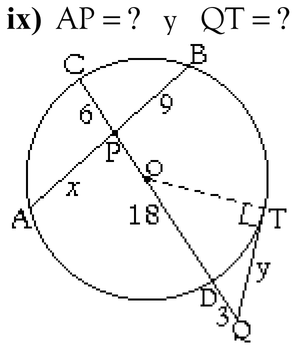
vii) $PA = 4;\ AB = 12;\ PT = z = ?$



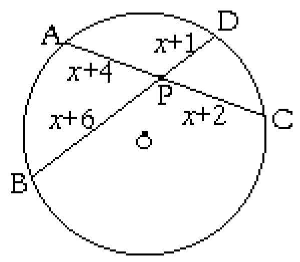
viii) $PA = 7;\ PT = 14;\ AB = s = ?$



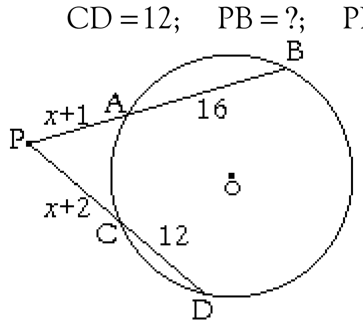
ix) $AP = ?$ y $QT = ?$



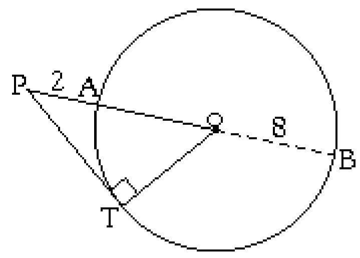
x) $AP = x+4;\ PB = x+2;\ CP = x+6;$
$PD = x+1;\ \ x = ?;\ \ \overline{PB} = ?$



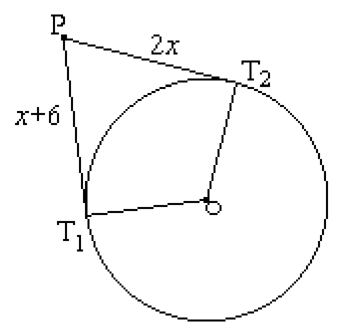
xi) $AP = x+1;\ AB = 16;\ PC = x+1;$
$CD = 12;\ \ \ PB = ?;\ \ \ PD = ?$



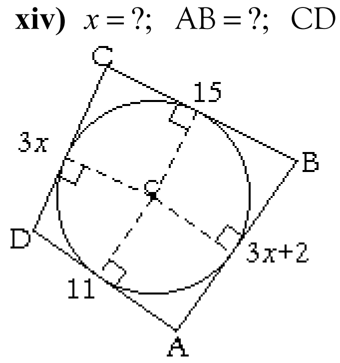
xii) $AP = 2$. ¿Cuánto mide el segmento tangente?



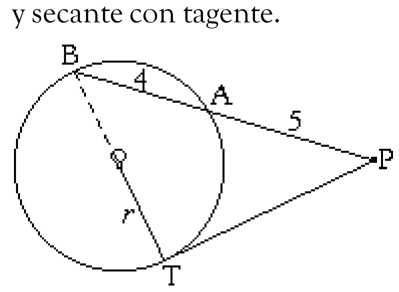
xiii) $x = ?;\ \ PT_1 = ?;\ \ PT_2 = ?$



xiv) $x = ?;\ \ AB = ?;\ \ CD = ?$



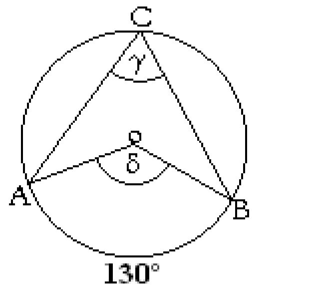
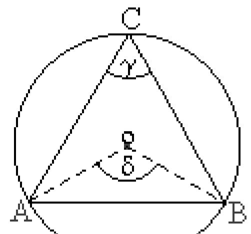
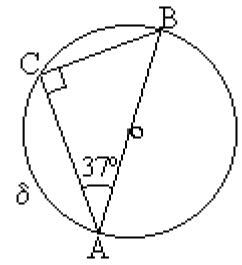
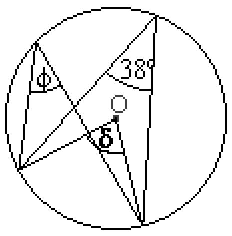
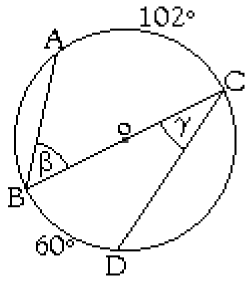
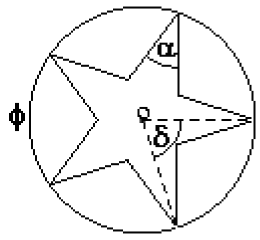
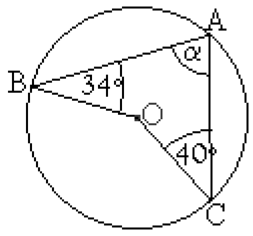
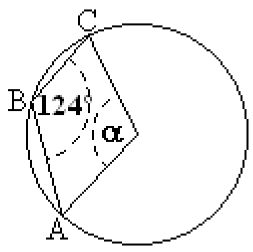
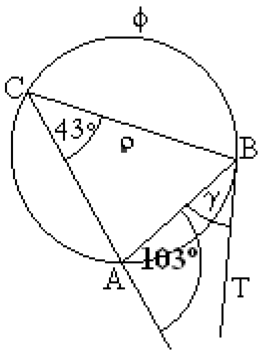
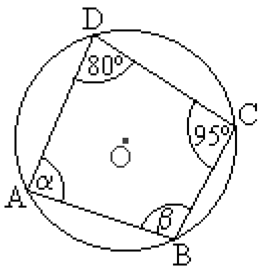
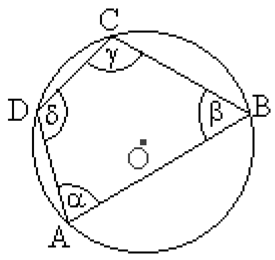
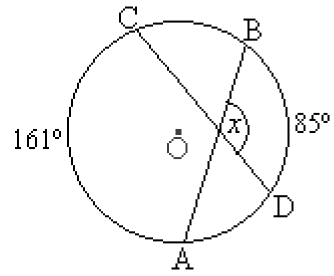
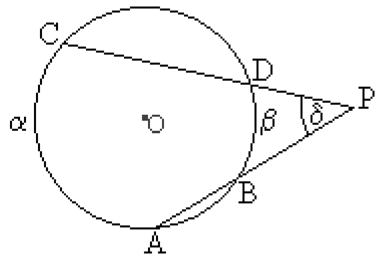
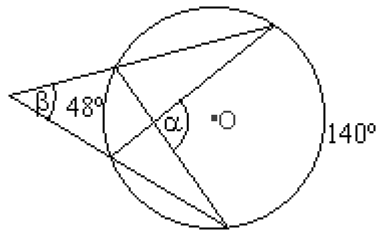
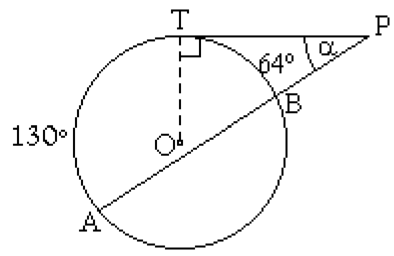
xv) $r = ?$
Hint.: Usar teo. de Pitágoras y secante con tagente.



Listado Nº 5: Ejercicios de Recapitulación

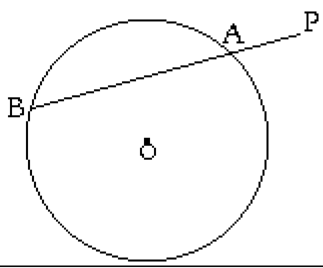
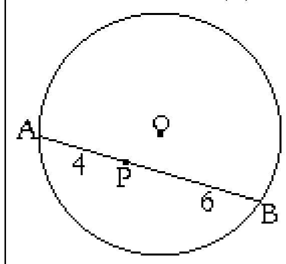
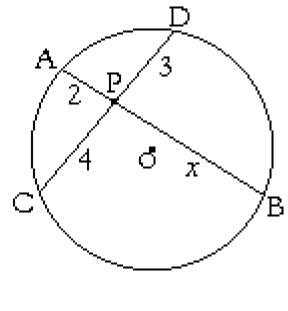
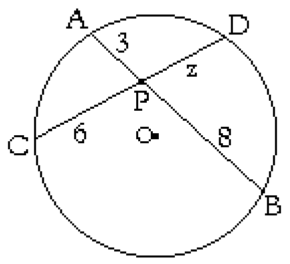
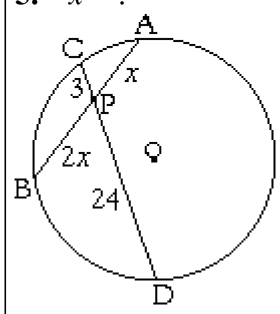
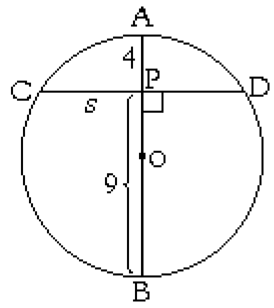
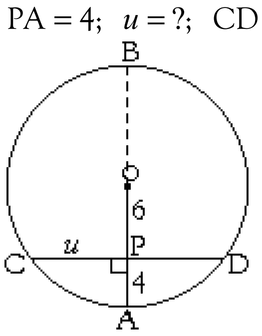
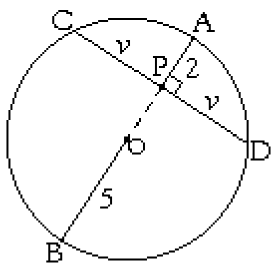
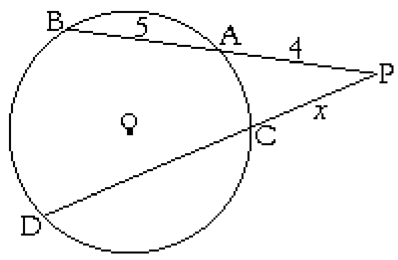
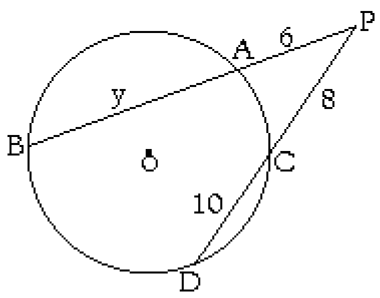
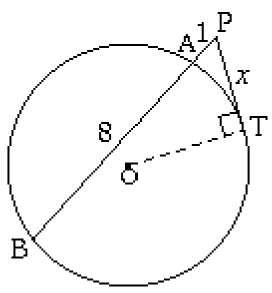
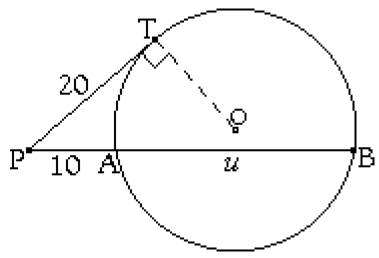
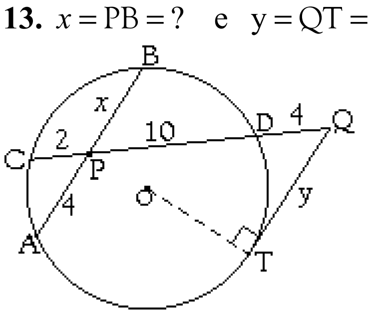
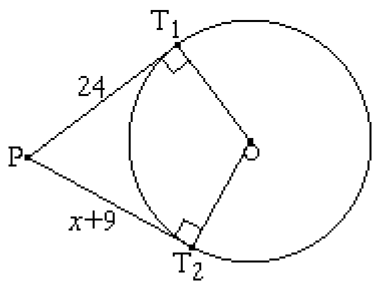
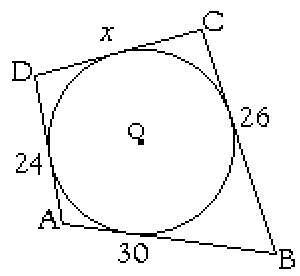
I. Ángulos en la Circunferencia

Hallar lo que se indica en cada circunferencia de centro O.

1. $\widehat{AB} = 130º \Rightarrow \gamma = ?;\ \delta = ?$ 	**2.** El triángulo ABC es equilátero. $\gamma = ?,\ \delta = ?$ 	**3.** $\widehat{AC} = \delta = ?$ 
4. $\phi = ?;\ \delta = ?$ 	**5.** $\widehat{AC} = 102º$ y $\widehat{BC} = 60º$ $\beta = ?\ ;\ \gamma = ?$ 	**6.** La estrella tiene todos sus lados y ángulos inscritos de igual medida. $\phi = ?,\ \delta = ?,\ \alpha = ?$ 
7. $\alpha = ?$ 	**8.** $\alpha = ?$ 	**9.** $\overline{BT}$ es tangente a la ⊗. $\phi = ?$ y $\gamma = ?$ 
10. $\alpha = ?;\ \beta = ?$ 	**11.** α, β, γ están en la razón de 5 : 4 : 7, respectivamente. Hallar δ. 	**12.** $x = ?$ 
13. Si α = 138º y β = 50º. δ = ? 	**14.** $\alpha = ?;\ \beta = ?$ 	**15.** $\alpha = ?$ 

II. Proporcionalidad en la Circunferencia

Hallar lo que se indica en cada circunferencia de centro O.

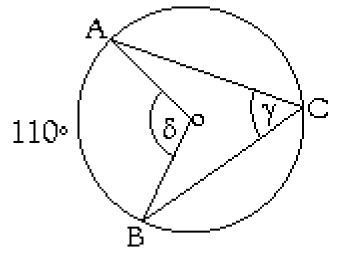
1. Si $PA = 2$ y $PB = 8$ Halle la $Pot(P) = PA \bullet PB$ 	**2.** $PA = 4$ y $PB = 6$ Halle la $Pot(P) = PA \bullet PB$ 	**3.** $x = ?$ 
4. $z = ?$ 	**5.** $x = ?$ 	**6.** $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 4$; $PB = 9$; $s = ?$; 
7. $\overline{OA}$ radio de la $\otimes$. $OP = 6$; $PA = 4$; $u = ?$; $CD = ?$ 	**8.** $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 2$; $OB = 5$; $v = ?$; $\overline{CD} = ?$ 	**9.** Si $PA = 4$; $AB = 5$; $PD = 12$ Entonces $PC = x = ?$ 
10. $PA = 6$; $PC = 8$; $CD = 10$ $AB = y = ?$ 	**11.** $PA = 1$; $AB = 8$; $PT = x = ?$ 	**12.** $PA = 10$; $PT = 20$; $AB = u = ?$ 
13. $x = PB = ?$ e $y = QT = ?$ 	**14.** $x = ?$, $PT_1 = PT_2 = ?$ 	**15.** $AB = 30$; $BC = 26$; $DA = 24$. Entonces $CD = x = ?$ 

Listado Nº 6: Ejercicios de Recapitulación Nº 2

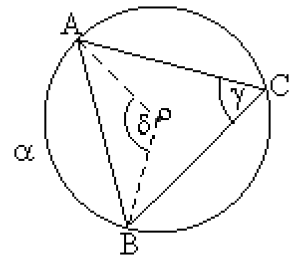
I. Ángulos en la Circunferencia

Hallar lo que se indica en cada circunferencia de centro O.

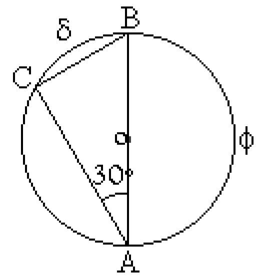
1. $\widehat{AB} = 110^\circ \Rightarrow \gamma = ?;\ \delta = ?$



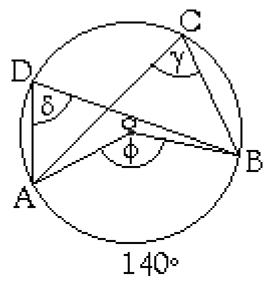
2. El ΔABC es equilátero.
$\alpha = \widehat{AB} = ?, \quad \gamma = ?, \quad \delta = ?$



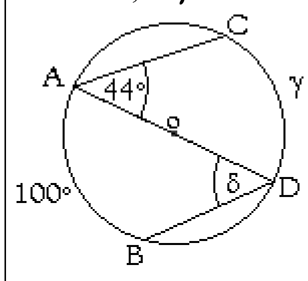
3. $\overline{AB}$ diámetro. $\delta = ?,\ \phi = ?$
$\measuredangle ACB = ?$



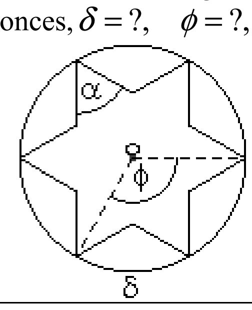
4. $\phi = ?, \quad \delta = ?, \quad \gamma = ?$



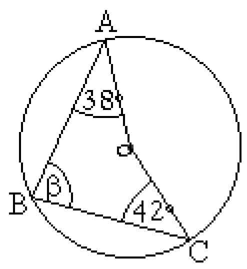
5. $\widehat{AB} = 100^\circ$ y $\measuredangle CAD = 44^\circ$
$\delta = ?, \quad \gamma = ?$



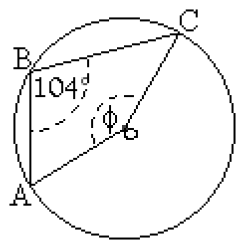
6. La estrella de seis puntas tiene todos sus lados de igual medida. Entonces, $\delta = ?, \quad \phi = ?, \quad \alpha = ?$



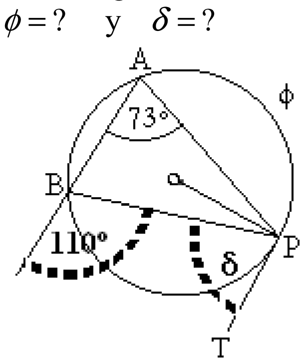
7. $\beta = ?$



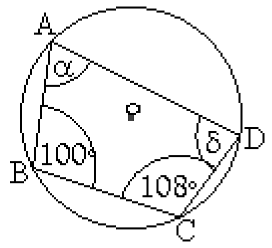
8. $\phi = ?$



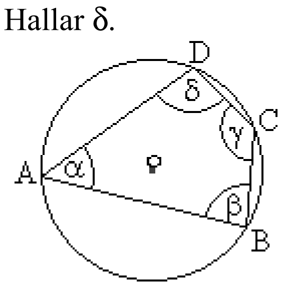
9. $\overline{PT}$ es tangente a la ⊙.
$\phi = ?$ y $\delta = ?$



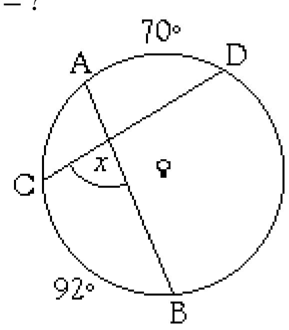
10. $\alpha = ?, \quad \delta = ?$



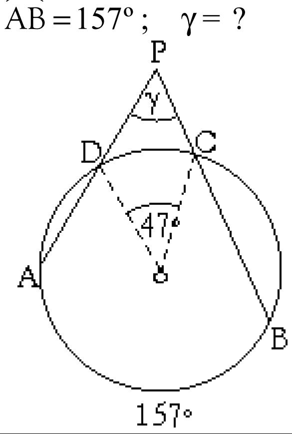
11. α, β, γ están en la razón de 5 : 8 : 13, respectivamente. Hallar δ.



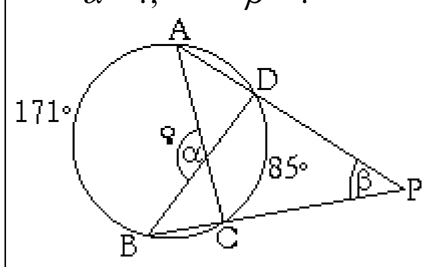
12. $x = ?$



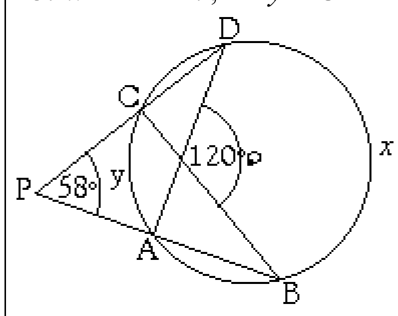
13. $\widehat{AB} = 157^\circ;\ \ \gamma = ?$



14. $\widehat{AB} = 171^\circ;\ \widehat{CD} = 85^\circ$
$\alpha = ?; \qquad \beta = ?$



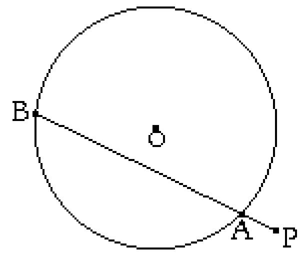
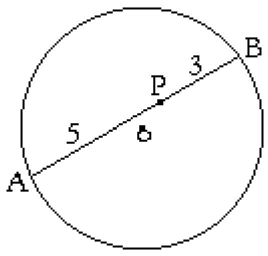
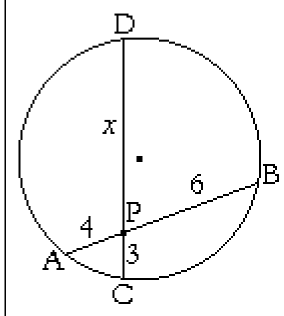
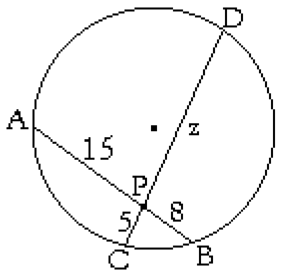
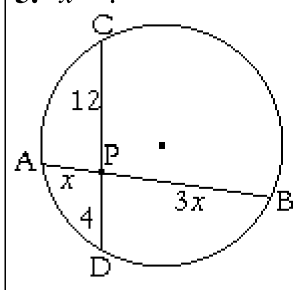
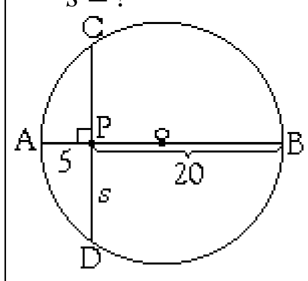
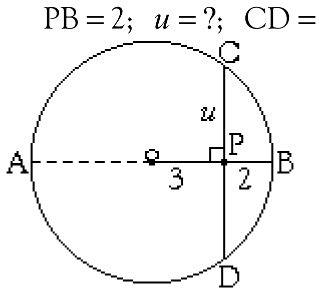
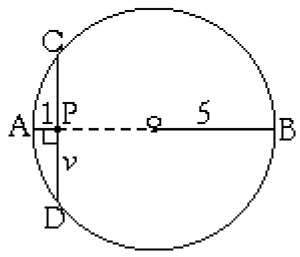
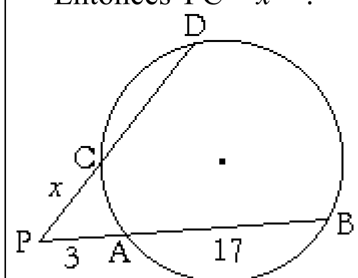
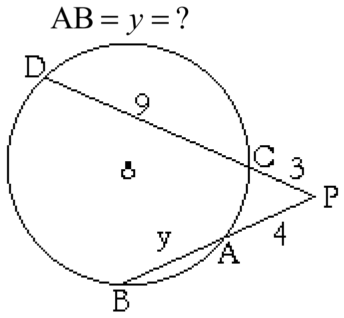
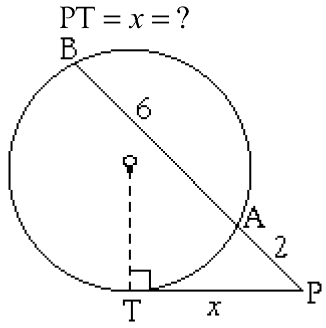
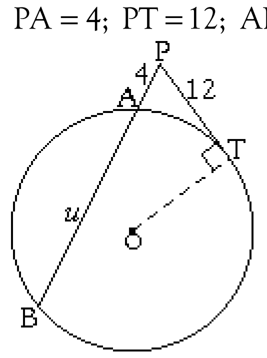
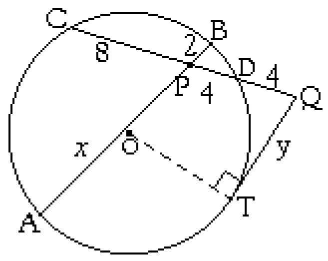
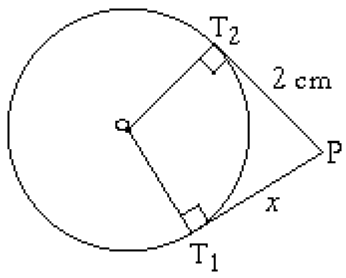
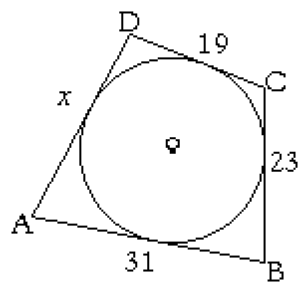
15. $x = \widehat{BD} = ?; \qquad y = \widehat{CA} = ?$



Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

II. Proporcionalidad en la Circunferencia

Hallar lo que se indica en cada circunferencia de centro O.

1. Si $PA = 3$ y $PB = 21$ Halle la $Pot(P) = PA \bullet PB$ 	**2.** $PA = 5$ y $PB = 3$ Halle la $Pot(P) = PA \bullet PB$ 	**3.** $x = ?$ 
4. $z = ?$ 	**5.** $x = ?$ 	**6.** $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 5$; $PB = 20$; $s = ?$ 
7. $\overline{OB}$ radio de la $\otimes$. $OP = 3$; $PB = 2$; $u = ?$; $CD = ?$ 	**8.** $\overline{AB}$ diámetro. $PA = 1$; $OB = 5$; $v = ?$; $\overline{CD} = ?$ 	**9.** Si $PA = 3$; $AB = 17$; $PD = 12$ Entonces $PC = x = ?$ 
10. $PA = 4$; $PC = 3$; $CD = 9$ $AB = y = ?$ 	**11.** $PA = 2$; $AB = 6$; $PT = x = ?$ 	**12.** $PA = 4$; $PT = 12$; $AB = u = ?$ 
13. $x = PA = ?$ e $y = QT = ?$ 	**14.** $x = ?$ 	**15.** $AB = 31$; $BC = 23$; $CD = 19$. Entonces $DA = x = ?$ 

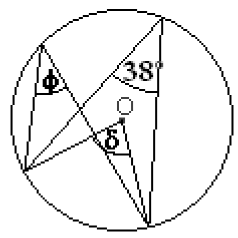
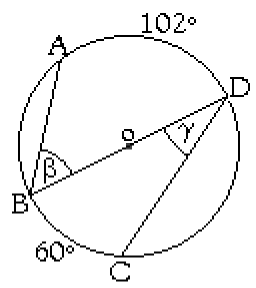
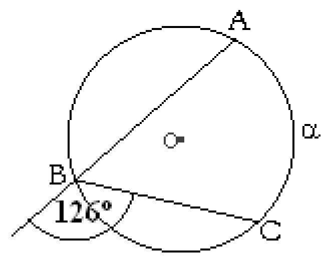
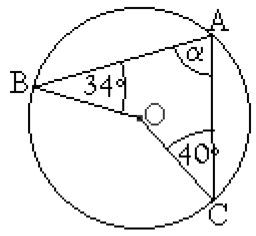
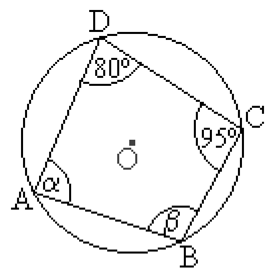
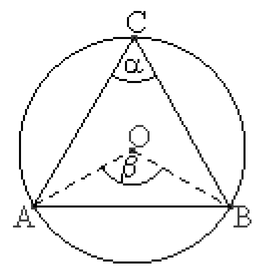
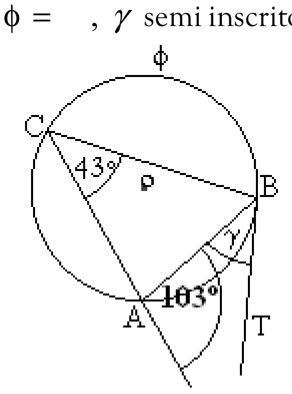
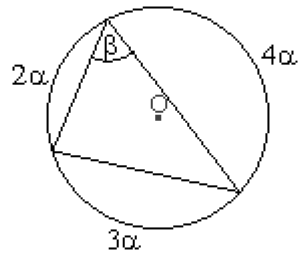
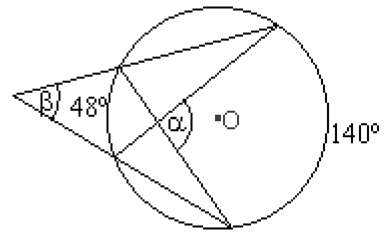
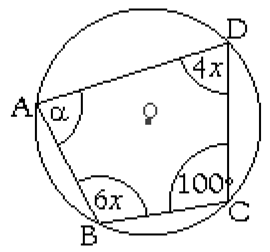
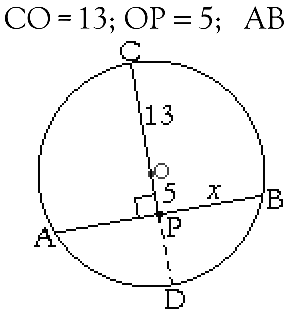
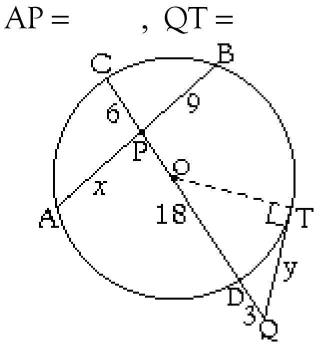
Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Control de Circunferencias

Fila Atenea

Nombre: ____ Curso: ______ Puntaje:

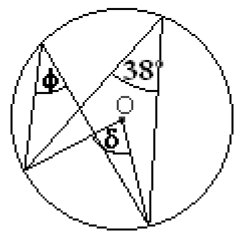
Halle los valores que se indican a continuación: *(1 punto cada recuadro resuelto correcta y completamente)*

1. $\phi =$, $\delta =$ 	**2.** $\overset{\frown}{DA} = 102°$ y $\overset{\frown}{BC} = 60°$ $\beta =$, $\gamma =$ 	**3.** $\alpha =$ 
4. $\alpha =$ 	**5.** $\alpha =$, $\beta =$ 	**6.** El triángulo ABC es equilátero. $\alpha =$, $\beta =$ 
7. $\overline{BT}$ es tangente a la ⊙. $\phi =$, γ semi inscrito = 	**8.** $\alpha =$, $\beta =$ 	**9.** $\alpha =$, $\beta =$ 
10. $\alpha =$, $x =$ ∢ABC = , ∢CDA = 	**11.** $\overline{CO} = 13$; OP = 5; AB = 	**12.** AP = , QT = 

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

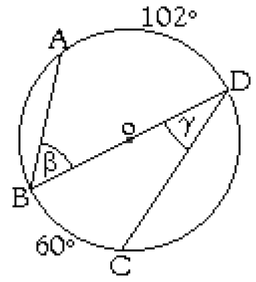
Solucionario Fila Atenea

1. $\phi =$, $\delta =$



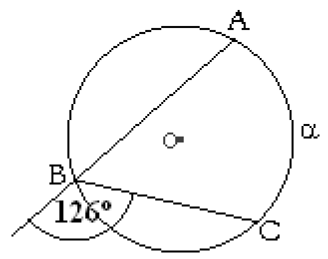
Solución:
– ϕ mide lo mismo que el otro ángulo inscrito (de la esquina), pues comparten el mismo arco de circunferencia. Es decir, 38°.
– δ es ángulo del centro y mide el doble que el ángulo inscrito ϕ=36°.
Es decir, δ = 2•38° = 76°
Así, $\phi = 38°$, $\delta = 76°$

2. $\widehat{DA} = 102°$ y $\widehat{BC} = 60°$
$\beta =$, $\gamma =$

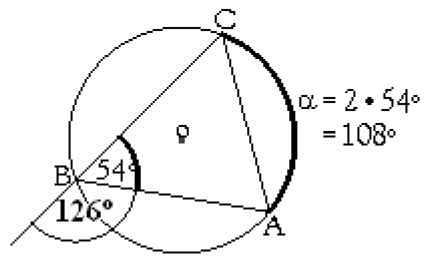


Solución:
β es igual a la mitad de la medida del arco $\widehat{DA}$.
Es decir, β = 102°/2 = 51°.
Igualmente, γ = 60°/2 = 30°.

3. $\alpha =$

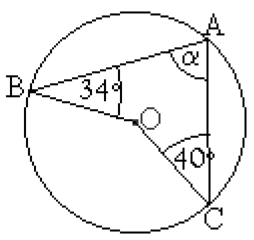


Solución:
Completamos para formar 180° de dos ∢s adyacentes suplementarios o la medida de media ⊙.
Si nos dan 126°, nos faltan:
180° – 126° = 54° para llegar a los 180°.
La figura muestra donde se sitúan estos 54°.



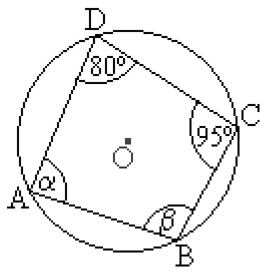
Y α mide el doble que el ángulo de la esquina –llamado inscrito, con el que comparte el arco $\widehat{AC}$.

4. $\alpha =$



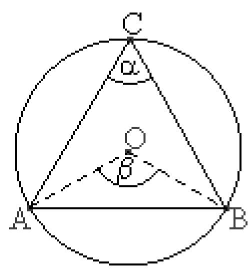
Solución:
Aquí podemos resumir con que en figuras de esta forma, el ángulo inscrito –o de la esquina- α mide la suma de los otros dos ángulos inscritos.
α = 34° + 40° = 74°.
La figura muestra donde se sitúa estos 56°.
Y α mide el doble que el ángulo de la esquina –llamado inscrito, con el que comparte el arco $\widehat{AC}$.

5. $\alpha =$, $\beta =$



Solución:
Los ángulos opuestos de todo cuadrilátero –figura ABCD– miden 180°.
Si al frente de α nos dan 95°, entonces, para llegar a 180° nos faltan 180° –95° = 85°, que es lo que debe medir α.
Y al frente de β nos dan 80°, faltándonos 100° para llegar a 180°, medida que debe tener β.
Así, $\alpha = 85°$, $\beta = 100°$.

6. El triángulo ABC es equilátero.
$\alpha =$, $\beta =$



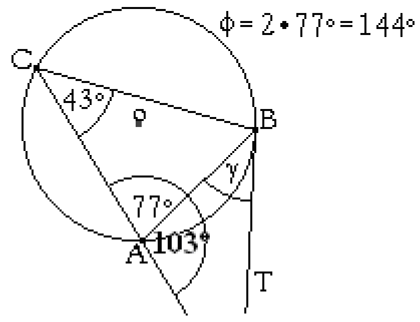
Solución:
El ΔABC equilátero divide a la ⊙ en tres arcos congruentes. Y por lo tanto, en tres ∢s del centro iguales a:

$\beta = 360°/3 = 120°$

Y cada ángulo inscrito, de la esquina, mide:

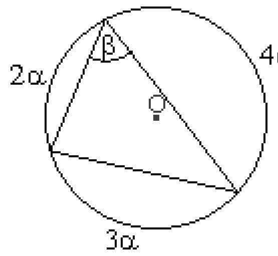
$\alpha = 120°/2 = 60°$

7. $\overline{BT}$ es tangente a la ⊙.
ϕ = , γ semi inscrito =



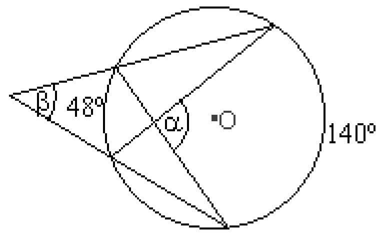
Solución:
Completamos para formar medida de media ⊙, esto es 180°.
Si nos dan 103°, nos faltan:
180° – 103° = 77°
La figura muestra donde se sitúan estos 77°.
Mientras que ϕ, por hallarse sobre el perímetro de la ⊙, mide el doble que el ángulo inscrito (que el de la esquina), **que subtiende el mismo arco de ⊙ que el.**
Esto es, ϕ = 2•77° = 154°
Por último, γ formado por un segmento tangente, es conocido como ∢ semi–inscrito. Siempre medirá lo mismo que el ∢ inscrito con el cual subtiende el mismo arco de ⊙. Es decir, en la figura, que 43°.

8. $\alpha =\qquad , \beta =$



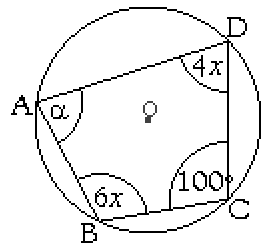
Solución:
Notemos que la suma de todos los α forman los 360º de la ⊙.
$2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360°$
$9\alpha = 360°$
$\alpha = \frac{360°}{9} = 40°$
β es ∢ inscrito y mide la mitad que el arco 3α = 3 • 40º = 120º
Es decir, $\beta = \frac{120°}{2} = 60°$

9. $\alpha =\qquad , \beta =$



Solución:
α es un ∢ interior a la ⊙ y mide el promedio de arcos que subtiende.
$\alpha = \frac{140° + 48°}{2} = \frac{188°}{2} = 94°$
β es un ∢ exterior a la ⊙ y es igual a la semi diferencia de los arcos que subtiende.
$\beta = \frac{140° - 48°}{2} = \frac{92°}{2} = 46°$

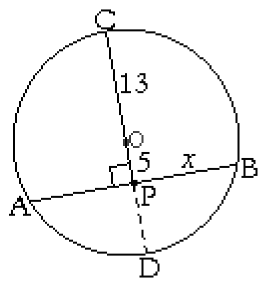
10. $\alpha =\qquad , x =$
∢ABC = , ∢CDA =



Solución:
Al igual que en el ejercicio 5, ∢s opuestos suman 180º.
Entonces, α = 180º–100º = 80º.
Mientras que:
$6x + 4x = 180°$
$10x = 180°$
$x = \frac{18\cancel{0}°}{1\cancel{0}°} = 18°$
$\Rightarrow$ ∢ABC = $6x = 6 \bullet 18° = 108°$
(tras resolver el producto)
Y ∢CDA = $4x = 4 \bullet 18° = 72$

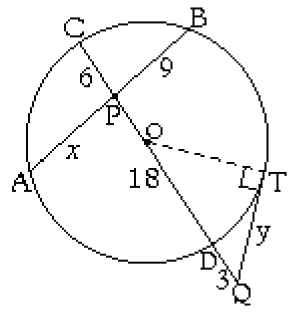
O si se prefiere, como es opuesto al ∢ABC, entre ambos miden 180º. Así que:
∢ CDA=180º– ∢ABC
=180º–108º = 72º

11. $\overline{CO} = 13$; OP = 5; AB =



Solución:
El cuadrado cercano al punto P indica que el diámetro $\overline{CD}$ corta perpendicularmente –formando 90º– a la cuerda $\overline{AB}$.
Cuando esto ocurre, $\overline{AB}$ está dimidiado (cortado justo por la mitad). Por lo tanto, $\overline{PA} = \overline{PB} = x$
Además, OC = OD = radio = 13. De donde PD = 8 para completar el radio OD.
Una vez notado esto, podemos emplear:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$x \bullet x = (5+13) \bullet 8$
$x^2 = 18 \bullet 8$
$= 144$
Lo que implica que $x = 12$
¡¡Pero no nos preguntan por el valor de x, sino de la cuerda $\overline{AB}$!!
No hay problema. $\overline{AB} = 2x = 2 \bullet 12 = 24$

12. AP = , QT =



Solución:
Aquí debemos ocupar dos teoremas, el de las cuerdas y el de la tangente con la secante.
El primero nos indica que:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$
$x \bullet 9 = 6 \bullet 18$
$x = \frac{6 \bullet \cancel{18}^2}{\cancel{9}}$
$x = 6 \bullet 2$
$x = 12 = AP$
El segundo teorema nos indica:
$QT^2 = QC \bullet QD$
$y^2 = 27 \bullet 3 = 81 \Rightarrow y = 9 = QT$

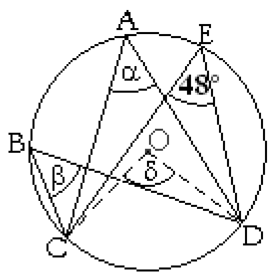
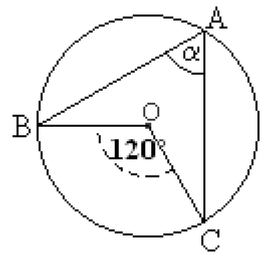
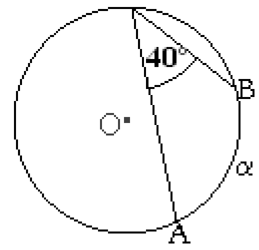
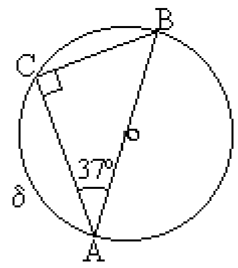
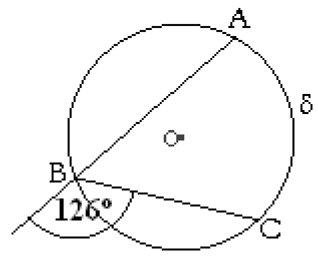
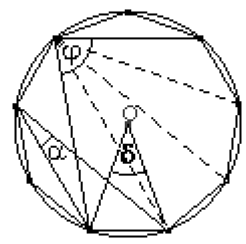
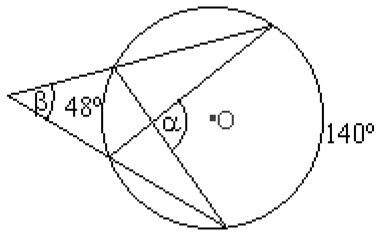
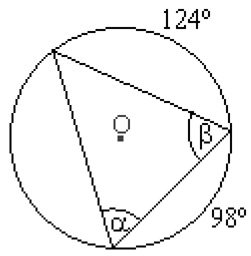
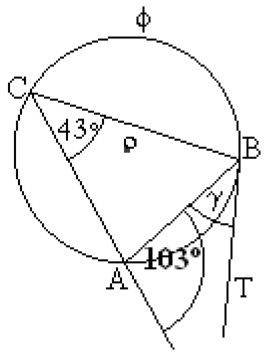
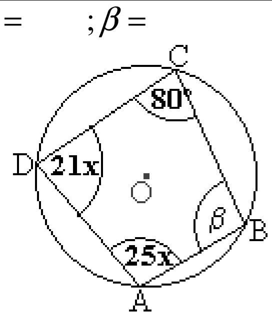
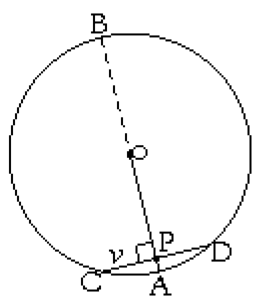
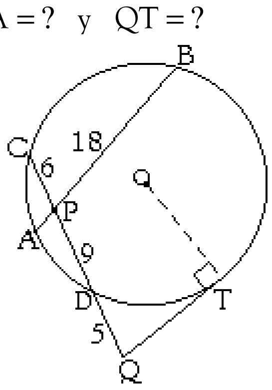
Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Control de Circunferencias

Fila Apolo

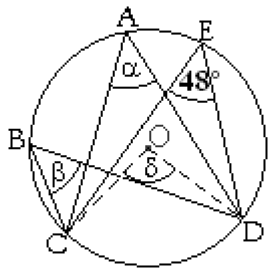
Nombre: ____ Curso: ______ Puntaje:

Halle los valores que se indican a continuación: *(1 punto cada recuadro resuelto correctamente y completo)*

1. $\alpha = ?,\ \beta = ?,\ \delta = ?$ 	**2.** $\alpha = ?$ 	**3.** $\widehat{AB} = \alpha = ?$ 
4. $\widehat{CA} = \delta = ?$ 	**5.** $\delta = ?$ 	**6.** Se tiene un nonágono regular (polígono de nueve lados congruentes) inscrito en la ⊙. $\delta = ?,\ \alpha = ?,\ \varphi = ?$ 
7. $\alpha = ?;\ \beta = ?$ 	**8.** $\alpha =$ $;\beta =$ 	**9.** $\overline{BT}$ es tangente a la ⊙. $\phi = ?$ y γ semi inscrito $= ?$ 
10. $x =$ $;\beta =$ 	**11.** Si $AP = 2$ y $PO = 15$. ¿Cuánto mide la cuerda $\overline{CD}$? 	**12.** $PA = ?$ y $QT = ?$ 

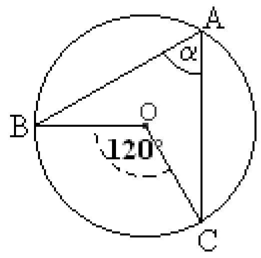
Solucionario Fila Apolo

1. $\alpha = ?, \ \beta = ?, \ \ \delta = ?$



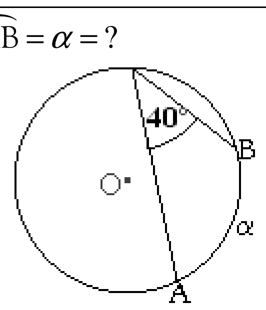
Solución:
– α y β miden lo mismo que el otro ángulo inscrito –de la esquina–, con el cual subtienden –o comparten– el mismo arco $\overset{\frown}{CD}$ de ⊙.
Es decir, $\alpha\, y\, \beta$ *miden* 38º.
– δ es ángulo del centro y mide el doble que el ∢ inscrito de 48° con el cual subtiende el mismo arco $\overset{\frown}{CD}$ de ⊙.
Es decir, δ = 2•48° = 96°
Así, $\alpha = \beta = 48°$ y $\delta = 96°$

2. $\alpha = ?$



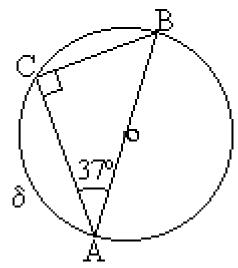
Solución:
α es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro con el cual subtiende el mismo arco $\overset{\frown}{BC}$ de ⊙.
Es decir, α = 120°/2 = 60°.

3. $\overset{\frown}{AB} = \alpha = ?$



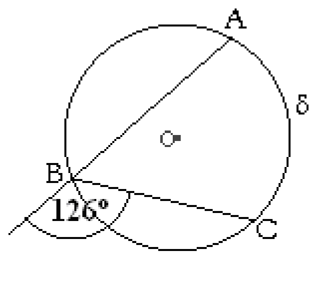
Solución:
α es un arco de ⊙. Y al igual que todo ∢ del centro, mide el doble que el ∢ de la esquina –inscrito, con el que comparte el mismo arco, en este caso, $\overset{\frown}{AC}$.
Es decir, α =2•40°=80°.

4. $\overset{\frown}{CA} = \delta = ?$

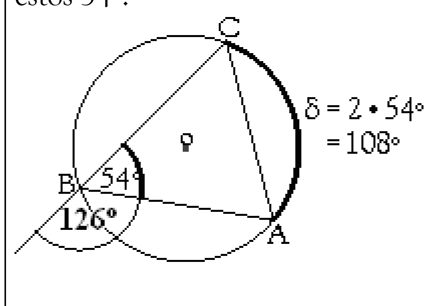


Solución:
δ es como todo arco –e incluso como todo ángulo del centro, el doble que la medida del ángulo inscrito o de la esquina, que subtienda el mismo arco que el.
Es decir, si $\delta = \overset{\frown}{CA}$, nos interesa hallar el ∢ABC que subtiende el mismo arco $\overset{\frown}{CA}$.
Para ello, recordemos que la suma de los ∢*s* interiores de todo Δ es igual a 180°.
El cuadrado en el vértice C nos indica que ahí hay 90°. Así que dentro del triángulo nos dan:
90°+37°=127° y lo que falta para completar los 180° del Δ son:
180° – 127° =53°.
Por lo tanto, ∢ABC = 53°
Y entonces, δ = doble de ∢ABC
= 2•53° = 106°

5. $\delta = ?$

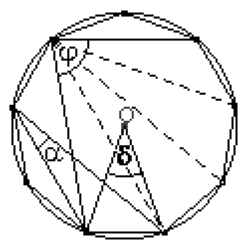


Solución:
Completamos para formar dos ∢*s* adyacentes suplementarios o para llegar a la medida de media ⊙ de 180°.
Si nos dan 126°, nos faltan:
180° – 126° = 54°
La figura muestra donde se sitúan estos 54°.



Y δ = $\overset{\frown}{CA}$ es un arco de ⊙. Y al igual que todo ∢ del centro, mide el doble que el ∢ inscrito –de la esquina, con el que comparte el arco que subtiende.
Es decir, δ =108°.

6. Se tiene un nonágono regular (polígono de nueve lados congruentes) inscrito en la ⊙.
$\delta = ?, \ \alpha = ?, \ \varphi = ?$



Solución:
La ⊙ está dividida por 9 arcos congruentes, donde la medida de cada uno y de cada ∢ del centro, es:

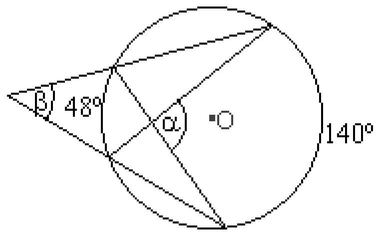
$$\delta = \frac{360°}{9} = 40°$$

Como α es un ángulo que subtiende uno de estos arcos, pero desde la esquina –llamado ∢ inscrito. Su medida es igual a la mitad que cada ∢ del centro o arco. Esto es:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$

Y φ = 4α es igual a cuatro ∢s inscritos (de las esquina).
φ = 4•20° = 80°

7. $\alpha = ?$; $\beta = ?$



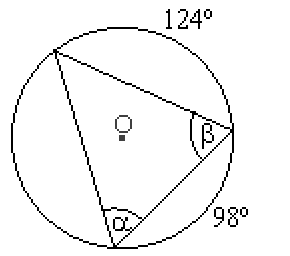
Solución:
α es un ∢ interior a la ⊙ y mide el promedio de arcos que subtiende.

$$\alpha = \frac{140°+48°}{2} = \frac{188°}{2} = 94°$$

β es un ∢ exterior a la ⊙ y es igual a la semi diferencia de los arcos que subtiende.

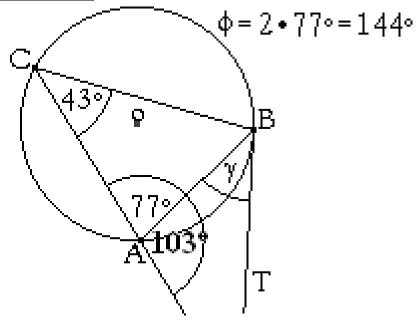
$$\beta = \frac{140°-48°}{2} = \frac{92°}{2} = 46°$$

8. $\alpha =$; $\beta =$



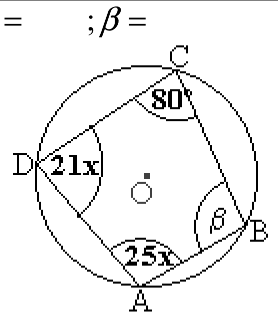
Solución:
α es un ∢ inscrito –de la esquina, que está frente a un arco de 124°. Entonces, α mide su mitad.
Esto es, α = 124°/2= 62°.
En cambio, desconocemos la medida del arco de ⊙ que está frente a β. Pero es fácil de hallarlo. Es lo que falta para completar 360°, la medida de una ⊙.
Se tiene 98° + 124°= 222°
y faltan:
360°–222° = 138° de la ⊙.
Los que deben hallarse en donde no se indica valor alguno, frente a β.
Y por ser β ángulo inscrito, β es igual a la mitad de la medida de tal arco, es decir: β = 138°/2 = 69°.

9. $\overline{BT}$ es tangente a la ⊙.
$\phi = ?$ y γ semi inscrito $= ?$
Solución:



Completamos para formar la medida de media ⊙, esto es 180°.
Si nos dan 103°, nos faltan:
180° – 103° = 77°
La figura muestra donde se sitúan estos 77°.
Mientras que ϕ, por hallarse sobre el perímetro de la ⊙, mide el doble que el ángulo inscrito –de la esquina–, **que subtiende el mismo arco de ⊙ que el**.
ϕ = 2•77° = 154°.
Por último, γ es un ∢ que está formado por un segmento tangente. Este tipo de ∢*s* son conocidos como ∢*s* semi –inscritos. Siempre miden lo mismo que el ∢ inscrito o de la esquina con el cual subtiende el mismo arco. En nuestra fig:
γ = 43°.

10. $x =$; $\beta =$



Solución:
∢*s* opuestos suman 180°.

$$25x + 80 = 180°$$

$$25x = \underbrace{180°-80°}_{100°}$$

$$x = \frac{100°}{25} = 4°$$

Mientras que:

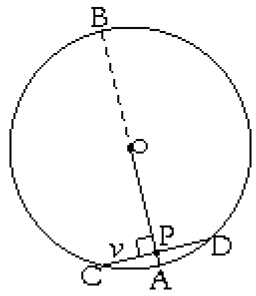
$$21x + \beta = 180°$$

$$21 \bullet 4 + \beta = 180°$$

$$88° + \beta = 180°$$

$$\beta = 180° - 88° = 92°$$

11. Si $AP = 2$ y $PO = 15$.
¿Cuánto mide la cuerda $\overline{CD}$?



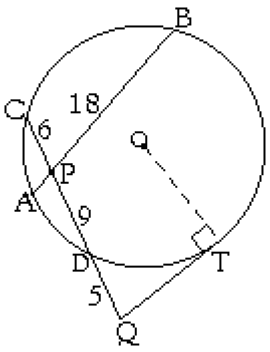
Solución:
Aplicamos la famosa igualdad:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$2 \bullet PB = v \bullet v$ (*)
Para hallar PB, notemos que:
PB = Diámetro AB –PA
= 2 veces el radio –2
= 2 OP –2
= 2 (15 + 2) –2
= 2 • 17 –2 = 34 –2 = 32
Reemplazando este valor de PB en (*):

$$2 \bullet 32 = v^2 \Rightarrow 64 = v^2$$

$$\Rightarrow v = 8 \Rightarrow CD = 2v = 16$$

12. $PA = ?$ y $QT = ?$



Solución:
Aquí debemos ocupar dos teoremas.
1$^{\text{ero}}$: El teorema de las cuerdas nos indica que:
$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

$$x \bullet 18 = 6 \bullet 9$$

$$x = \frac{6 \bullet \cancel{9}}{\cancel{18}_2} = \frac{6}{2} = 3 = AP$$

2$^{\text{do}}$: Y el teorema de la tangente con la secante:

$$QT^2 = QC \bullet QD$$

$$y^2 = 20 \bullet 5 = 100 \Rightarrow y = 10 = QT$$

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

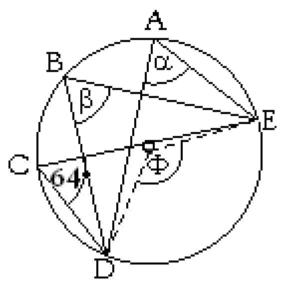
Control de Circunferencias

Fila Afrodita

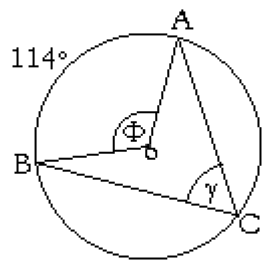
Nombre: ____ Curso: ______ Puntaje:

Halle los valores que se indican a continuación: *(1 punto cada recuadro resuelto correctamente y completo)*

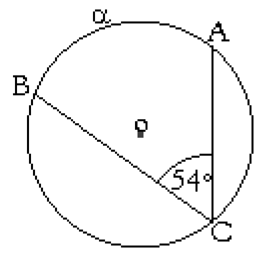
1. $\alpha =$, $\beta =$, $\Phi =$



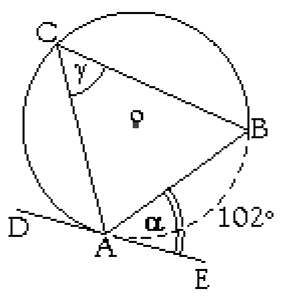
2. $\Phi =$, $\gamma =$



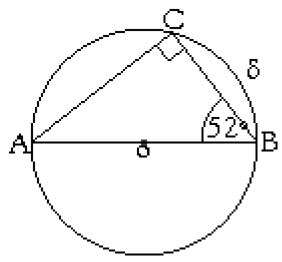
3. ¿Cuánto mide $\widehat{AB} = \alpha$?



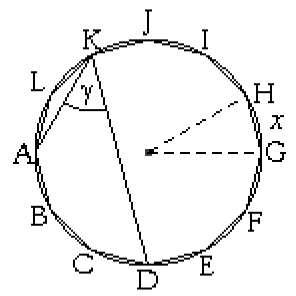
4. Si $\widehat{AB} = 102°$; $\alpha =$
$\gamma =$



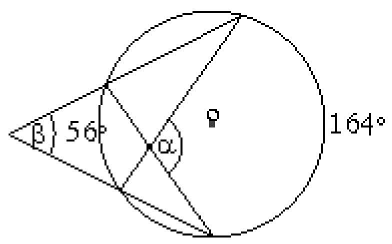
5. $\widehat{BC} = \delta =$



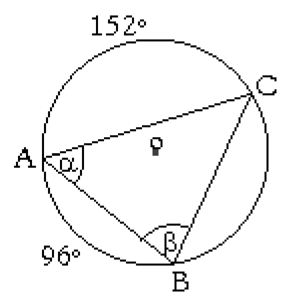
6. Se tiene un polígono de doce lados congruentes, inscrito en la circunferencia. $x = \widehat{GH} =$
$\gamma = \sphericalangle AKD =$



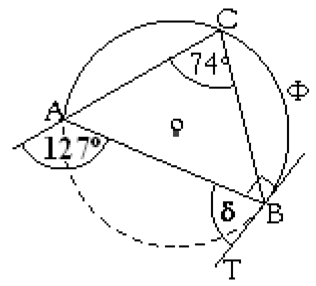
7. $\alpha =$, $\beta =$



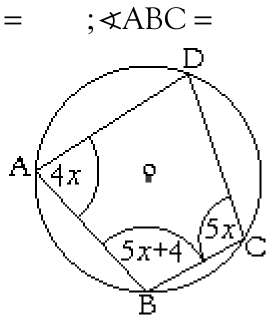
8. $\alpha =$, $\beta =$



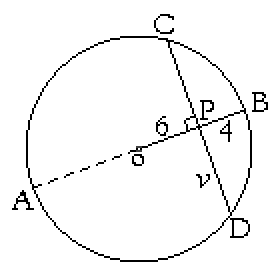
9. $\overline{BT}$ es tangente a la ⊙.
$\delta =$, $\Phi =$



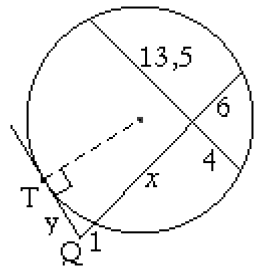
10. $x =$; $\sphericalangle ABC =$



11. Si $PB = 4$ y $PO = 6$.
¿Cuánto mide la cuerda $\overline{CD}$?



12. $x =$, $y =$



Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

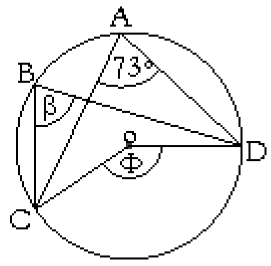
Control de Circunferencias

Fila Ares

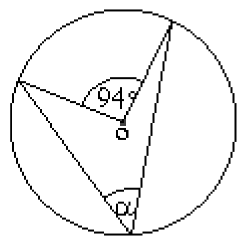
Nombre: ____ Curso: ______ Puntaje:

Halle los valores faltantes que se indican a continuación: *(1 punto cada recuadro resuelto correcta y completamente)*

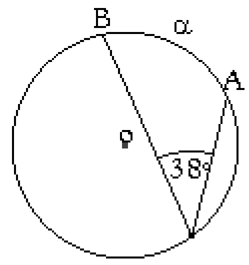
1. $\beta =$, $\Phi =$



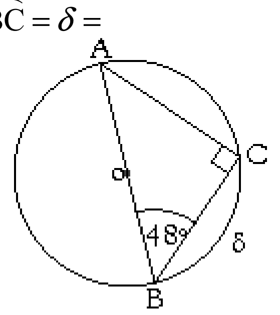
2. $\alpha =$



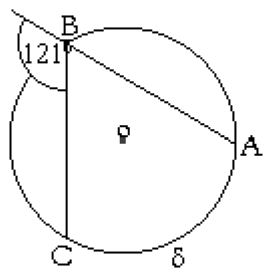
3. $\widehat{AB} = \alpha =$



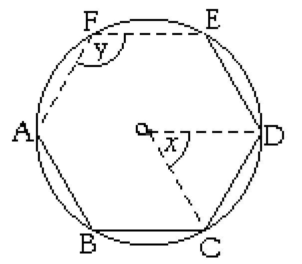
4. $\widehat{BC} = \delta =$



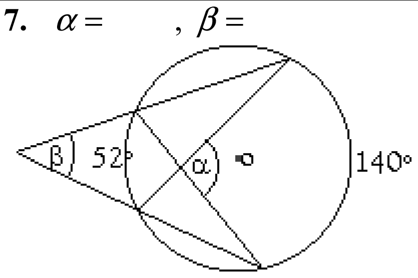
5. $\delta = ?$



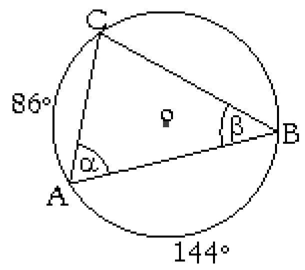
6. Se tiene un hexágono regular (polígono de seis lados congruentes) inscrito en la ⊙.
$x =$, $y =$



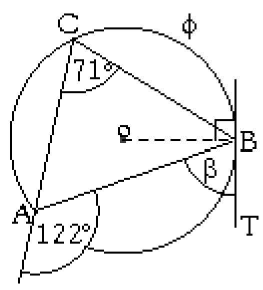
7. $\alpha =$, $\beta =$



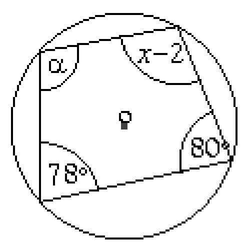
8. $\alpha =$, $\beta =$



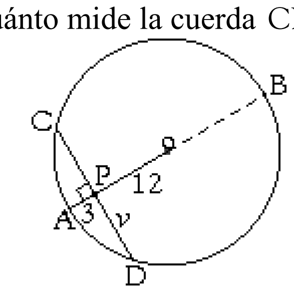
9. $\overline{BT}$ es tangente a la ⊙.
$\beta =$, $\phi =$



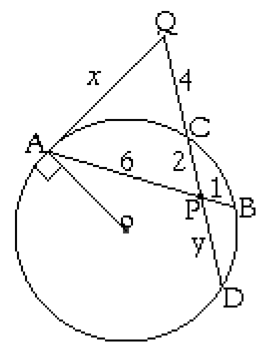
10. $\alpha =$, $x =$



11. Si $AP = 3$ y $PO = 12$.
¿Cuánto mide la cuerda $\overline{CD}$?



12. $x =$, $y =$



Círculos y Circunferencias: *Áreas y perímetros*

Definiciones:

1. PERÍMETRO DE LA CIRCUNFERENCIA Y AREA DEL CÍRCULO

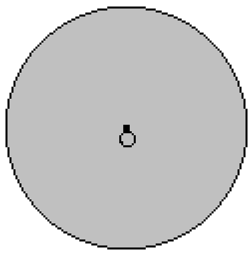
El ***Perímetro de la circunferencia,*** designada comúnmente con la letra P, es la longitud de la línea fronteriza que encierra un círculo.

El número ***Pi***, designado con la letra griega **π** y cuyo valor es $\pi \approx 3{,}14$ surge del cuociente entre el perímetro P de una ⊗ y su diámetro $d = 2R$ R radio de la ⊙.

$$\pi = \frac{P}{d} \Rightarrow \quad P = \pi d \qquad \text{O bien,} \qquad \pi = \frac{P}{2r} \Rightarrow P = 2\pi r$$

La última expresión es la más usada en la literatura matemática para calcular el perímetro P de una ⊙.

En cambio, un ***círculo*** es una región que tiene a una circunferencia como frontera. Es una superficie interior a la circunferencia y podemos calcular en el área del círculo.

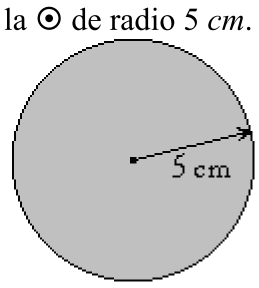
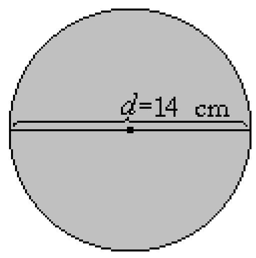


Aquí estamos ilustrando el círculo, al interior de la circunferencia, con la región sombreada.

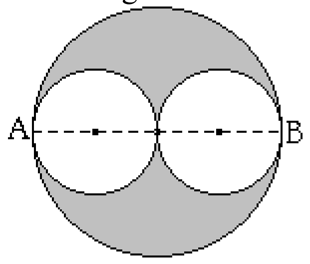
El área A del círculo viene dado por: $A = \pi r^2$

Ahora no corresponde hablar de perímetro del círculo. Pues, como ya se indicó, el perímetro no mide superficies, sino longitudes, dimensiones lineales.

<u>Ejemplos</u> de cálculos de áreas y perímetros de ⊙s

1. Halle el área y perímetro de la ⊙ de radio 5 *cm*.  <u>Solución</u>: Reemplazando el valor de: $r = 5$ *cm.* en las fórmulas del Área y Perímetro, tendremos: $A = \pi r^2$ $= \pi(5\text{ cm})^2$ $= 25\pi\text{ cm}^2$ $P = 2\pi r = 2\pi \bullet 5\text{ cm}$ $= 10\pi\text{ cm}$	**2.** Halle el área y perímetro de la ⊙ de diámetro 14 *cm*.  <u>Solución</u>: $d = 14\text{ cm} \Rightarrow R = 7\text{cm}$ Reemplazando el valor $R = 7$ *cm.* en las fórmulas del Área y Perímetro: $A = \pi r^2 = \pi(7\text{ cm})^2$ $= 49\pi\text{ cm}^2$ $P = 2\pi r = 2\pi \bullet 7\text{ cm}$ $= 14\pi\text{ cm}$ También podemos usar:: $P = d\pi = 14\,\pi\text{ cm}$	**3.** Halle el área y perímetro de la región sombreada. o es centro de la ⊙ mayor.  <u>Solución</u>: La región achurada tiene por área la diferencia de áreas de dos ⊙s: $A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$ $= \pi(36-9)\text{ cm}^2$ $= 25\,\pi\text{ cm}^2$ Y su perímetro por la suma: $P = 2\pi R + 2\pi r$ $= 2\pi(R+r)$ $= 2\pi(6+3)\text{ cm}$ $= 2\pi \bullet 9\text{ cm}$ $= 18\,\pi\text{ cm}$

4. Halle el área y perímetro de la región sombreada.
En la figura, $\overline{AB} = 12\text{ cm}$, donde $\overline{AB}$ es diámetro de la ⊙ más grande.



Solución:
Al igual que en el ejemplo anterior, debemos restar áreas de ⊙s. Pero en este caso, debemos restar 2 áreas de ⊙ a la mayor.
Pues bien:

$$\overline{AB} = 12\text{ cm} \Rightarrow R = 6\text{ cm};$$
$$\Rightarrow r = 3\text{ cm}.$$

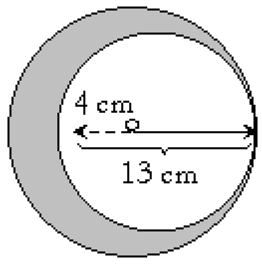
Entonces:

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 - \pi r^2 - \pi r^2 \\ &= \pi\left(8^2 - 3^2 - 3^2\right)\text{cm}^2 \\ &= (64 - 9 - 9)\pi \text{ cm}^2 \\ &= 46\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

El perímetro de la figura achurada está limitado por tres circunferencias. Y viene dada por la suma de todos los perímetros:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi R + 2\pi r + 2\pi r \\ &= 2\pi(R + r + r) \\ &= 2\pi(6+3+3)\text{ cm} \\ &= 2\pi \bullet 12\text{ cm} \\ &= 24\pi\text{ cm} \end{aligned}$$

5. Halle el área y perímetro de la región sombreada. O es centro de la ⊙ mayor y el radio de la menor mide 4 *cm*.



Solución:
Aquí nuevamente tenemos dos circunferencias, de las cuáles debemos restar sus respectivas áreas para obtener la superficie de la región achurada.
La circunferencia más pequeña tiene radio $r = 4$ *cm*.
Mientras que para obtener el radio de la mayor, debemos notar que la medida de 13 *cm* sobrepasa a la medida de su radio precisamente en la medida del radio de la ⊙ más pequeña. Quiero decir que, según la figura, el radio R de la ⊙ más grande es:

$$R = (13 - 4)\text{ cm} \Rightarrow R = 9\text{ cm}$$

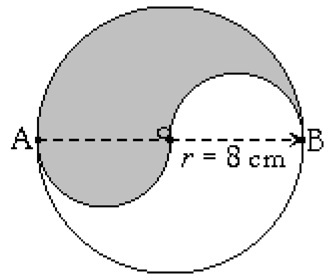
Ya con los radios de ambas ⊙s, procedemos a restar sus áreas para obtener así, la de la figura sombreada:

$$\begin{aligned} A &= \pi\left(R^2 - r^2\right) \\ &= \pi\left(9^2 - 4^2\right)\text{cm}^2 \\ &= \pi(81 - 16)\text{cm}^2 \\ &= 65\,\pi\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

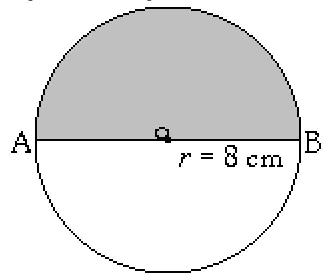
El perímetro de la figura está nuevamente delimitado por el de ambas ⊙s. En este caso, se suma sus perímetros individuales:

$$\begin{aligned} P &= (2\pi \bullet 9 + 2\pi \bullet 4)\text{ cm} \\ &= (18 + 8)\pi\text{ cm} \\ &= 26\pi\text{ cm} \end{aligned}$$

6. Halle el área y perímetro de la región sombreada. O es centro y $\overline{AB}$ es diámetro.



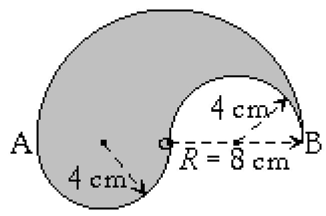
Solución:
Si trasladamos el semicírculo de la izquierda a la derecha, tendríamos la siguiente figura:



Que es a su vez el área de un semicírculo de radio: $r = 8$ *cm*.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 8^2}{2}\text{cm}^2 \\ &= \frac{64\pi}{2}\text{cm}^2 = 32\pi\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

En cambio, el perímetro de la figura original achurada, está limitado por tres semicircunferencias:
La mayor de las ⊙s, de radio $R = 8$ *cm* y las dos semi⊙s menores, de radio $r = 4$ *cm*.



$$\begin{aligned} P &= \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} + 2\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}} \\ &= \pi R + 2\pi r \\ &= \pi(R + 2r) \\ &= \pi(8 + 2 \bullet 4)\,cm \\ &= \pi(8+8)\,cm \\ &= 16\,\pi\,cm \end{aligned}$$

En relación al perímetro del último ejercicio... algo podremos inducir...

Notemos que en el ejercicio $2r = R$. (*)

En este caso: $2 \bullet 4 = 8$

Antes de reemplazar los valores $R = 8\ cm$ y $r = 4\ cm$. La expresión del perímetro es:

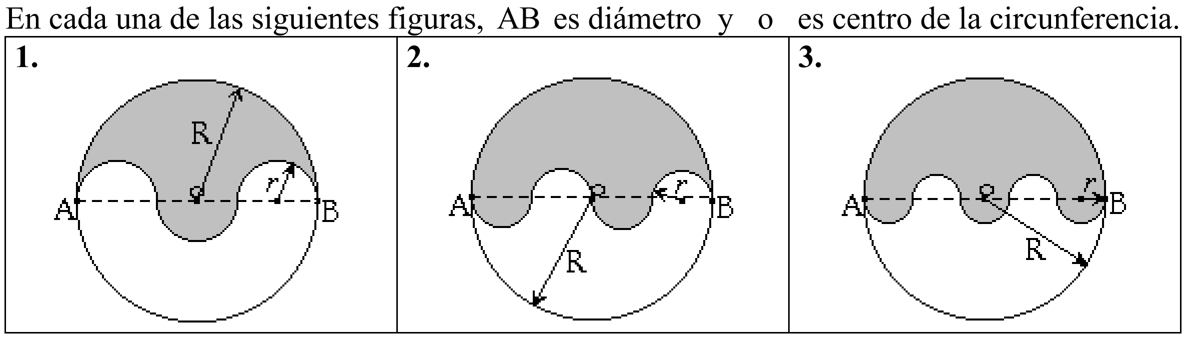
$$P = \pi(R + 2r)$$

El que se puede reescribir usando (*) como: $P = \pi\,(R+R) = 2\pi R$

Es decir, la figura sombreada siempre tendría un perímetro igual a la ⊙ mayor.

Ahora viene lo interesante. El perímetro de todas las siguientes figuras sombreadas, ¡también son iguales a $2\pi R$! Lo interesante es ver el patrón regular en las formas de estas y concluir posteriormente.

En cada una de las siguientes figuras, $\overline{AB}$ es diámetro y o es centro de la circunferencia.



Podemos imaginar una circunferencia con *n* semicircunferencias congruentes y tangentes a lo largo del diámetro de la circunferencia completa. De esta manera y por lo que se desprende de la figura, podemos inducir una relación entre el radio ***R*** de la circunferencia y el radio ***r*** de cada una de las semicircunferencias que se distribuyen en torno al diámetro.

Número *N* de semicircunferencias	Relación entre AO = *R* = OB y *r*	Perímetro de la figura sombreada
N = 2 (pág.nterior)	$R = OB = 2r$ $\Rightarrow r = \frac{R}{2}$	$P = \pi R + 2\pi r = \pi(R + 2r)$ y como $R = 2r$ $= \pi(R + R)$ $= 2\pi R$
N = 3 (recuadro 1)	$R = OB = 3r$ $\Rightarrow r = \frac{R}{3}$	$P = \pi R + 3\pi r = \pi(R + 2r)$ $= \pi(R + R)$ pues $R = 3r$ $= 2\pi R$
N = 4 (recuadro 2)	$R = OB = 4r$ $\Rightarrow r = \frac{R}{4}$	$P = \pi R + 4\pi r = \pi(R + 4r)$ $= \pi(R + R)$ pues $R = 4r$ $= 2\pi R$
N = 5 (recuadro 3)	$R = OB = 5r$ $\Rightarrow r = \frac{R}{5}$	$P = \pi R + 5\pi r = \pi(R + 5r)$ $= \pi(R + R)$ pues $R = 5r$ $= 2\pi R$
...	...	...
N = *n* (recuadro 3)	$R = OB = nr$ $\Rightarrow r = \frac{R}{n}$	$P = \pi R + n\pi r = \pi(R + nr)$ $= \pi(R + R)$ pues $R = nr$ $= 2\pi R$

Se puede notar además que, cuando el número ***n*** de semicircunferencias **es par**, las superficies sombreadas se pueden redistribuir para cubrir con exactitud medio círculo. Con lo que el área, en tales casos es: $A = \frac{\pi R^2}{2}$

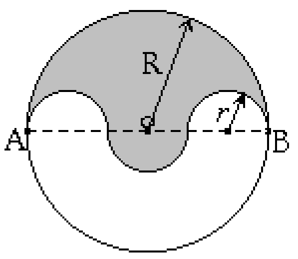
Y si *n* es impar, el área tendrá una de las formas:

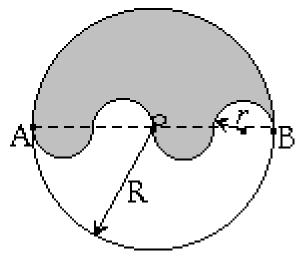
$$A = \frac{\pi R^2}{2} \pm \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left[R^2 \pm \left(\frac{R}{n}\right)^2\right] = \frac{\pi R^2}{2}\left(1 \pm \frac{1}{n^2}\right)$$

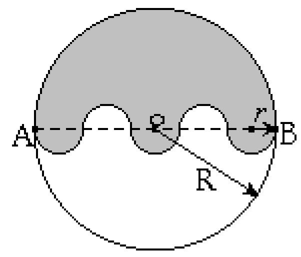
Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Siendo el último término "+" si sobresale más allá del medio círculo la redistribución de las regiones sombreadas y "–" en caso que la redistribución de las zonas sombreadas no alcance a cubrir medio círculo.

Ejemplos:
Halle el perímetro y áreas de las siguientes regiones sombreadas:
En cada una de las siguientes figuras, $R = 60$ *cm.* $\overline{AB}$ es diámetro y o es centro de la circunferencia.

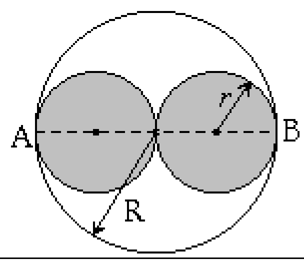
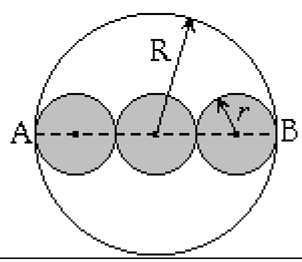
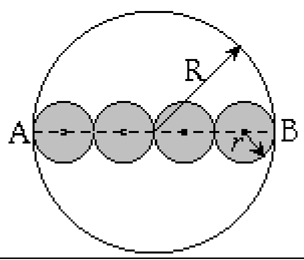
<table>
<tr>
<td>1.

Solución:
El perímetro, conforme a la tabla anterior es:
$P = 2\pi R = 120\,\pi$ cm.

La región sombreada no alcanza a cubrir medio círculo, por lo que su área es, con $r = 60$ cm/3 = 20 cm.
$A = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}$
$= \left(\frac{3600\,\pi}{2} - \frac{400\,\pi}{2}\right)$ cm^2
$= \frac{3200\,\pi}{2}$ cm^2
$= 1600\,\pi$ cm^2</td>
<td>2.

Solución:
El perímetro, conforme a la tabla anterior es:
$P = 2\pi R = 120\,\pi$ cm.

El número de semicircunferencias es par, así que el área de la región sombreada forma exactamente medio círculo:
$A = \frac{\pi R^2}{2}$
$= \frac{\pi \bullet 3600}{2}$ cm^2
$= 1800\,\pi$ cm^2</td>
<td>3.

Solución:
El perímetro, conforme a la tabla anterior es:
$P = 2\pi R = 120\,\pi$ cm.

La región sombreada cubre más de medio círculo. Su área es, con $r = 60$ cm/5 = 12 cm.
$A = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2}$
$= \left(\frac{3600\,\pi}{2} + \frac{144\,\pi}{2}\right)$ cm^2
$= (1800\,\pi + 72\,\pi)$ cm^2
$= 1872\,\pi$ cm^2</td>
</tr>
</table>

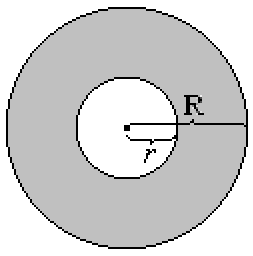
Interesante es notar que la relación del perímetro P = 2πR se mantiene en regiones sombreadas de la forma:

<table>
<tr>
<td>1.
</td>
<td>2.
</td>
<td>3.
</td>
</tr>
</table>

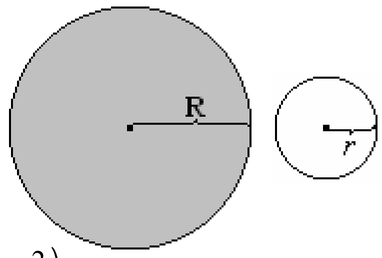
Donde en todos los casos, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia mayor. Y podemos inducir que es válida para *n* circunferencias interiores con radios a lo largo del diámetro.

2. CORONA CIRCULAR

Es la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas, esto es, que comparten el mismo centro.
Presentamos a continuación, en la fig. de la izquierda, la forma de toda corona o anillo circular.



Y cuya área se obtiene como la diferencia o resta de las áreas de los dos círculos que lo componen, ilustrado a la derecha.

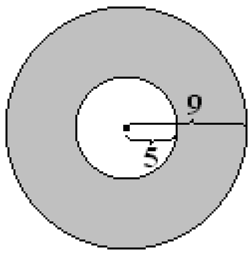
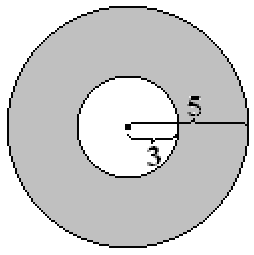
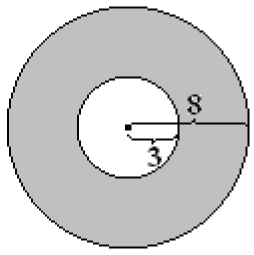


Esto es: A◎ $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

En cuánto al perímetro de todo anillo circular, debemos considerar la suma de perímetros de las dos circunferencias que lo definen, de radios R y r. Esto es:

P◎ $= 2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R + r)$

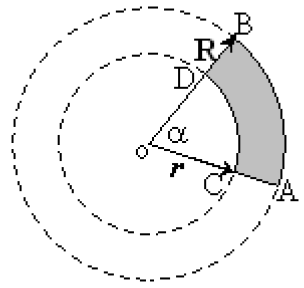
<u>Ejemplos</u>: Halle en cada una de las siguientes coronas o anillos circulares, el área y perímetro en *cm*.

1.	**2.**	**3.**
		
<u>Solución</u>: Reemplazando R = 9 y r = 5 *cm*. respectivamente en las fórmulas del Área y Perímetro, tendremos:	<u>Solución</u>: Reemplazando R = 5 y r = 3 *cm*. respectivamente en las fórmulas del Área y Perímetro, tendremos:	<u>Solución</u>: Reemplazando R = 8 y r = 3 *cm*. respectivamente en las fórmulas del Área y Perímetro, tendremos:
A◎ $= \pi\left(R^2 - r^2\right)$ $= \pi\left(9^2 - 5^2\right)\text{cm}^2$ $= \pi(91 - 25)\text{cm}^2$ $= 66\pi\ \text{cm}^2$	A◎ $= \pi\left(R^2 - r^2\right)$ $= \pi\left(5^2 - 3^2\right)\text{cm}^2$ $= \pi(25 - 9)\text{cm}^2$ $= 16\pi\ \text{cm}^2$	A◎ $= \pi\left(R^2 - r^2\right)$ $= \pi\left(8^2 - 3^2\right)\text{cm}^2$ $= \pi(64 - 9)\text{cm}^2$ $= 55\pi\ \text{cm}^2$
P◎ $= 2\pi(R + r)$ $= 2\pi(9 + 5)\text{cm}$ $= 2\pi \bullet 14\ \ \text{cm}$ $= 28\pi\ \text{cm}$	P◎ $= 2\pi(R + r)$ $= 2\pi(5 + 3)\text{cm}$ $= 2\pi \bullet 8\ \ \text{cm}$ $= 16\pi\ \text{cm}$	P◎ $= 2\pi(R + r)$ $= 2\pi(8 + 3)\text{cm}$ $= 2\pi \bullet 11\ \ \text{cm}$ $= 22\pi\ \text{cm}$

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

3. TRAPECIO CIRCULAR

Un trapecio circular es una región de un anillo o corona circular, limitado por los lados que determina un ángulo del centro al interior de un círculo.
El **perímetro** de un trapecio circular -figura de la derecha, viene dado por:

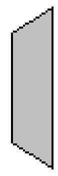


$$\begin{aligned} \text{P} &= \text{perímetro de}\left(\overset{\frown}{\text{AB}}+\overset{\frown}{\text{CD}}+\overline{\text{AC}}+\overline{\text{CD}}\right)\\ &= \frac{2\pi R\bullet\alpha}{360^{\text{o}}}+\frac{2\pi r\bullet\alpha}{360^{\text{o}}}+(R-r)+(R-r)\\ &= (R+r)\left(\frac{2\pi\alpha}{360^{\text{o}}}\right)+2(R-r)\\ &= (R+r)\left(\frac{\alpha\pi}{180^{\text{o}}}\right)+2(R-r) \quad \text{simplificando por 2} \end{aligned}$$

Donde el perímetro de cada arco es proporcional a la medida del ángulo α respecto a los 360º que componen el perímetro 2πR y 2πr de cada una de las circunferencias completas concéntricas de centro O.

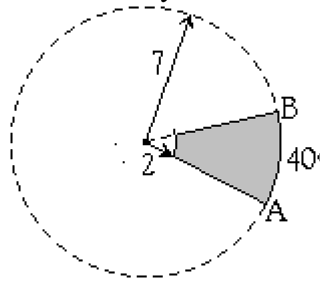
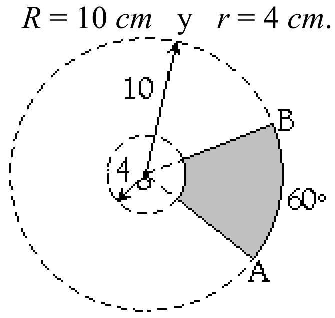
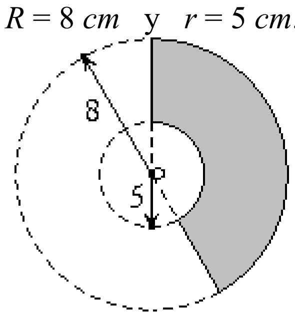
El **área** del trapecio circular viene dado por la diferencia de los sectores circulares que determinan los lados que definen el ángulo del centro sobre el círculo.

$$\text{A} = \frac{\pi R^2\alpha}{360^{\text{o}}}-\frac{\pi r^2\alpha}{360^{\text{o}}} = \left(R^2-r^2\right)\frac{\pi\alpha}{360^{\text{o}}}$$

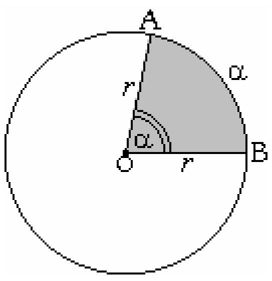


Nota aparte: Si las bases –superior e inferior- del trapecio circular se pusiesen rectilíneas, conservando las medidas de sus distancias entre los extremos y sin variar tampoco su altura $R - r$ entre ellas, la expresión del área del nuevo trapecio rectilíneo, sería la misma respecto al del trapecio circular.

Ejemplos: Halle el perímetro y área en cm y cm^2 respectivamente, de los siguientes trapecios circulares:

1. $R = 7\ cm$ y $r = 2\ cm$.	2. $R = 10\ cm$ y $r = 4\ cm$.	3. $R = 8\ cm$ y $r = 5\ cm$.
 Solución: **El perímetro del trapecio circular, en cm es:** $\text{P} = (7+2)\left(\frac{4\cancel{0}\pi}{18\cancel{0}}\right)+2(7-2)$ $= \left(\frac{36\pi}{18}+10\right)\text{cm}$ $= (2\pi+10)\,\text{cm}$ **El área es:** $\text{A} = \left(7^2-2^2\right)\left(\frac{40\pi}{360^{\text{o}}}\right)\ \text{cm}^2$ $= 45\bullet\frac{\cancel{40^{\text{o}}}\pi}{\cancel{360^{\text{o}}}_9}\ \text{cm}^2$ $= \frac{45}{9}\pi\ \text{cm}^2 = 5\pi\ \text{cm}^2$	 Solución: **El perímetro del trapecio circular, en cm es:** $\text{P} = (10+4)\left(\frac{60\pi}{180}\right)+2(10-4)$ $= \left(\frac{14\pi}{3}+12\right)\text{cm}$ **El área es:** $\text{A} = \left(10^2-4^2\right)\left(\frac{\cancel{60}\pi}{\cancel{360^{\text{o}}}_6}\right)\ \text{cm}^2$ $= 84\bullet\frac{\pi}{6}\ \text{cm}^2$ $= 14\pi\ \text{cm}^2$	 Solución: **El perímetro del trapecio circular, en cm es:** $\text{P} = (8+5)\left(\frac{15\cancel{0}\pi}{18\cancel{0}}\right)+2(8-5)$ $= \left(13\bullet\frac{5\pi}{6}+6\right)\text{cm}$ $= \left(\frac{65\pi}{6}+6\right)\text{cm}$ **El área es:** $\text{A} = \left(8^2-5^2\right)\left(\frac{{}^{5}\cancel{15}\cancel{0}\pi}{{}_{12}\cancel{36}\cancel{0}}\right)\ \text{cm}^2$ $= 39\bullet\frac{5\pi}{12}\ \text{cm}^2 = \frac{195}{12}\pi\ \text{cm}^2$

4. SECTOR CIRCULAR



La superficie comprendida entre dos radios y el arco que subtienden entre sí, se denomina sector circular. En la figura, es la región achurada

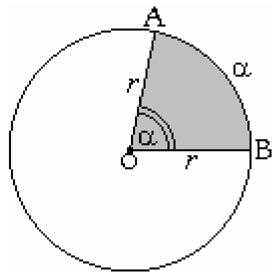
El área de un sector circular cuyo ángulo del centro -o arco- mide α, se determina mediante proporcionalidad directa. Clasificando ángulos de la ⊙ completa con α y sus respectivas áreas, como sigue: Efectuando el producto cruzado y despejando *x*:

Grados	*Áreas*
360	πr^2
α	x

$$360x = \alpha \bullet \pi r^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360}}$$

Donde $\boxed{x = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360}}$ es la medida del área de un sector circular cuyo ángulo del centro y arco que subtiende miden α°.

En tanto, **el perímetro de un sector circular** puede obtenerse usando también una proporción, pero lógicamente no con el área, sino con el perímetro de una circunferencia.



Ejemplo: la medida lineal del arco $\overset{\frown}{BA} = x$ es:

Grados	*Perímetro*
360	$2\pi r$
α	x

$$360x = \alpha \bullet 2\pi r \Rightarrow x = \frac{\alpha \bullet 2\pi r}{360} = \frac{\alpha\, \pi r}{180}$$

Y el perímetro final del sector circular de radio r es:

$$P = OA + OB + \overset{\frown}{BA} = r + r + \frac{\alpha \bullet 2\pi r}{360°}$$

$$= \boxed{2r + \frac{\alpha \bullet 2\pi r}{360°}}$$

O bien, si se prefiere, simplificando la fracción por dos:

$$P = 2r + \frac{\alpha \bullet \pi r}{180°}$$

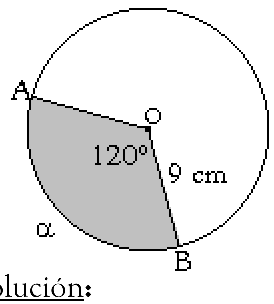
<u>RESUMIENDO</u>

El área de un sector circular de radio *r,* que subtiende un arco o ángulo del centro α viene dado por: $\boxed{\text{A} = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360}}$

Y el perímetro del mismo es: $\boxed{P = 2r + \frac{\alpha \bullet 2\pi r}{360°}} = 2r + \frac{\alpha \bullet \pi r}{180°}$

Ejemplos Halle en cada una de los siguientes sectores circulares, el área y perímetro.

1.



Solución:
Reemplazando en las expresiones del área y perímetro r = 9 cm tendremos:

$$A = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360º} = \frac{{}^{1}\cancel{120}º \bullet \pi 9^2}{\cancel{360º}_{3}}$$

O bien, notando: que 120º es la 3$^{\text{era.}}$ parte de una ⊙.

$$A = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{\pi\, 9^2}{3} = 27\,\pi \text{ cm}^2$$

$$P = 2r + \frac{a \bullet 2\pi r}{360}$$

$$= 2 \bullet 9 + \frac{{}^{1}\cancel{12}\cancel{0} \bullet 2\pi \bullet \cancel{9}^{3}}{{}_{1}\cancel{3}\,\cancel{36}\cancel{0}}$$

Después de múltiples simplificaciones:

$$= (18 + 6\pi) = 6(3 + \pi)\, cm$$

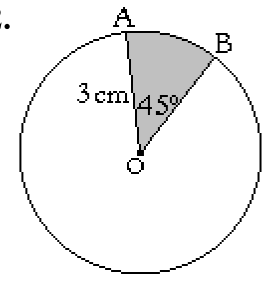
O bien: como el arco de 120º es la 3$^{\text{era}}$ parte de la ⊙:

$$P = 2r + \frac{2\pi r}{3} = 2 \bullet 9 + \frac{2\pi \bullet 9}{3}$$

$$= (18 + 6\pi) \text{ cm}$$

$$= 6(3 + \pi) \text{ cm}$$

2.



Solución:
Reemplazando en las expresiones del área y perímetro r = 3 cm tendremos:

$$A = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360º} = \frac{{}^{1}\cancel{45}º \bullet \pi 3^2}{\cancel{360º}_{8}}$$

$$= \frac{9\pi}{8}$$

O bien, notando: que 45º es la 8$^{\text{va.}}$ parte de una ⊙:

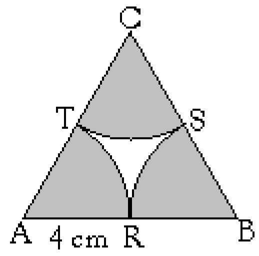
$$A = \frac{\pi r^2}{8} = \frac{\pi 3^2}{8} = \frac{9\pi}{8} \text{cm}^2$$

Y el perímetro resulta ser:

$$P = 2r + \frac{2\pi r}{8} = 2 \bullet 3 + \frac{2\pi 3}{8}$$

$$P = 6 + \frac{\cancel{2}\pi 3}{\cancel{8}_{4}} = 6 + \frac{3\pi}{4} \text{ cm}$$

3. El ΔABC es equilátero.
R, S y T son puntos medios de sus lados.



Solución:
Los triángulos equiláteros tienen sus tres lados iguales y además reparten en sus vértices los 180º también en tres partes iguales. Por lo que cada sector circular tiene un ángulo del centro en el vértice del Δ igual a 60º con un radio de 4 cm.
Así que los tres sectores circulares son congruentes entre sí.
Basta entonces hallar el área y perímetro de uno de ellos y a cada resultado, amplificarlo por tres.

$$A_1 = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360º} = \frac{\cancel{60º} \bullet \pi 4^2}{\cancel{360º}_{6}}$$

$$= \frac{16\pi}{6} cm^2$$

$$= \frac{8\pi}{3} cm^2$$

Por lo tanto:

$$A = 8\pi \text{ cm}^2$$

Es el área pedida.

Y el perímetro de un solo sector circular es:

$$P_1 = 2r + \frac{\alpha \bullet 2\pi r}{360}$$

$$= 2 \bullet 4 + \frac{\cancel{60} \bullet 2\pi \bullet \cancel{4}^{2}}{\cancel{360}\,\cancel{6}^{3}}$$

$$= 8 + \frac{4\pi}{3} \text{ cm}$$

Entonces, el perímetro final es:

$$P = (24 + 4\pi) \text{ cm}$$

Considere la utilidad de simplificar, facilitan el cálculo final de áreas y perímetros.
Es importante tener presente algunas relaciones de comparación entre distintos ángulos, respecto a los 360º que conforman una ⊙. Tales consideraciones simplifican el cálculo de áreas y perímetros, como se usó en los ejemplos 1 y 2.
Así, en lugar de las expresiones más comunes del:

Área $A = \dfrac{\alpha \bullet \pi r^2}{360}$ y perímetro $P = 2r + \dfrac{\alpha \bullet 2\pi r}{360}$ o $P = 2r + \dfrac{\alpha\, \pi r}{180}$

Para los ángulos de la siguiente tabla, es mejor notar que:

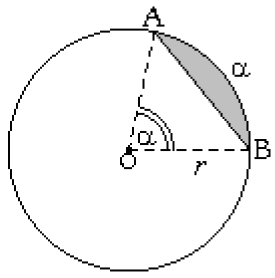
Grados	Razón con respecto a los grados de una Circunferencia (360º)	Tal denominador, en el Perímetro de un Sector Circular es:	Tal denominador, en el Área del Sector Circular es:
10º	$\dfrac{10º}{360º} = \dfrac{1}{36}$	$P = 2r + \dfrac{2\pi r}{36}$	$A = \dfrac{\pi r^2}{36}$
20º	$\dfrac{20º}{360º} = \dfrac{{}^{1}\cancel{2}\cancel{0}º}{\cancel{36}_{18}\cancel{0}º} = \dfrac{1}{18}$	$P = 2r + \dfrac{2\pi r}{18}$ $= 2r + \dfrac{{}^{1}\cancel{2}\pi r}{\cancel{18}_{9}} = 2r + \dfrac{\pi r}{9}$	$A = \dfrac{\pi r^2}{18}$
30º	$\dfrac{30º}{360º} = \dfrac{{}^{1}\cancel{3}\cancel{0}º}{\cancel{36}_{12}\cancel{0}º} = \dfrac{1}{12}$	$P = 2r + \dfrac{2\pi r}{12}$ $= 2r + \dfrac{{}^{1}\cancel{2}\pi r}{\cancel{12}_{6}} = 2r + \dfrac{\pi r}{6}$	$A = \dfrac{\pi r^2}{12}$

Halle expresiones para el área y perímetro de sectores circulares usando simplificación de las fórmulas de áreas y perímetros, como hemos vistos, con los siguientes ángulos:

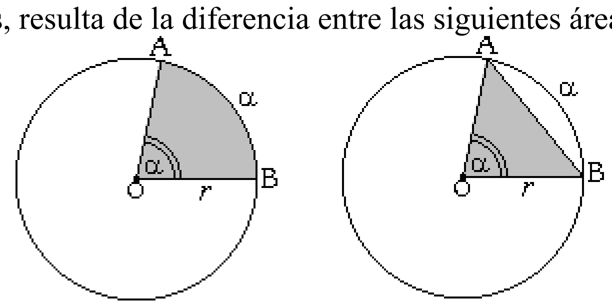
Grados	Relación con respecto a una Circunferencia (360º)	Perímetro del Sector Circular	Área del Sector Circular
45º	$\dfrac{45º}{360º} = \dfrac{{}^{1}\cancel{45}º}{\cancel{360}_{8}º} = \dfrac{1}{8}$	$P = 2r + \dfrac{2\pi r}{\quad}$	$A = \dfrac{\pi r^2}{\quad}$
60º			
90º			
120º			
180º			

5. SEGMENTO CIRCULAR

Es la región del círculo comprendida entre una cuerda y uno de los arcos que subtiende.



El cuál, observemos, resulta de la diferencia entre las siguientes áreas:



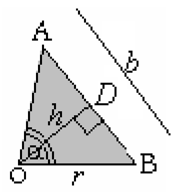
Área de Sector Circular   Área del Triángulo

Es decir:

Área segmento circular = área del sector circular − área del ΔOAB

$$= \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360º} - \text{área del } \Delta\text{OAB}$$

Para conocer el área del ΔOAB procedemos a bajar la altura desde el vértice O hasta la base $b = \text{AB}$.



Y el área viene dado por $\text{A} = \frac{h \bullet \text{base}}{2}$ $\text{A} = \frac{h \bullet \text{base}}{2} = \frac{hb}{2}$

Y por Pitágoras, en el ΔOBD:

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{b^2}{4} \Rightarrow \; h^2 = r^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4r^2 - b^2}{4} \qquad (*)$$

<u>Podemos considerar los siguientes casos para áreas de Δs OAB:</u>

i) El ΔOAB es equilátero, o bien: **α = 60º**. En tal caso se tiene que la medida de todos sus lados son iguales, la base es igual al radio *r*, esto es: $b = r$

Y al reemplazar $b = r$, la medida de la altura *h* indicado en (*) se transforma en:

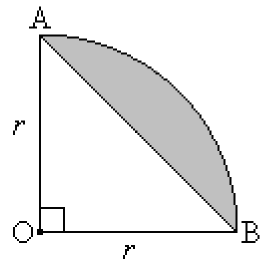
$$h^2 = \frac{4r^2 - r^2}{4} \Rightarrow \; h^2 = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Con lo que el área del ΔOAB nos queda: $\text{A} = \frac{h \bullet \text{base}}{2} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2} \bullet r}{2} = \boxed{\frac{r^2\sqrt{3}}{4}}$

Y el Área segmento circular = área del sector circular − área del ΔOAB

$$= \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360º} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{{}^{1}\cancel{60} \bullet \pi r^2}{\cancel{360º}_{6}} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

En este caso, podemos expresar el área del sector segmento circular en función de r.



ii) Cuando el ΔOAB sea rectángulo en O, o bien: **α = 90º**. La expresión del área es muy fácil. Pues el área de todo triángulo rectángulo puede hallarse mediante el semiproducto de sus dos catetos. En este caso, de sus radios.

$$A_{\Delta OAB} = \frac{OA \bullet OB}{2} = \frac{r^2}{2}$$

Y el Área segmento circular = área del sector circular − área del ΔOAB

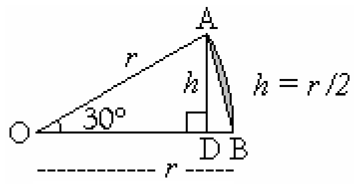
$$= \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360º} - \frac{r^2}{2} = \frac{{}^{1}\cancel{90} \bullet \pi r^2}{\cancel{360º}_4} - \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$$

Y podemos expresar el área del segmento circular en función de r.

No es necesario memorizarla, sino más bien saber deducirla del área de todo Δrectángulo.

iii) En el caso de que el Δ OAB sea isósceles con **α = 30º**, tendremos que recordar que:

- Bajar la altura desde uno de los vértices que están en la ⊙, al lado opuesto. Se forma así un ΔOAD rectángulo en D.
  Véase figura de la derecha.
  Donde la base $b = r$.



Además, en TODO Δrectángulo, el lado opuesto al ∢ de 30º mide SIEMPRE la mitad que la hipotenusa, en este caso, que el radio (su fundamento se halla en la función seno, de trigonometría).

$$\text{Así, } h = \frac{r}{2}.$$

En definitiva, lo que se debe de recordar es $h = \frac{r}{2}$, más el área de todo triángulo: $\boxed{A = \frac{hb}{2} = \frac{\frac{r}{2} \bullet r}{2} = \frac{r^2}{4}}$ Obteniendo el área del ΔOAD.

Así, el área de todo el segmento circular que subtiende un ángulo del central de 30º vendrá dado por:

Área segmento circular = área del sector circular − área del ΔOAB

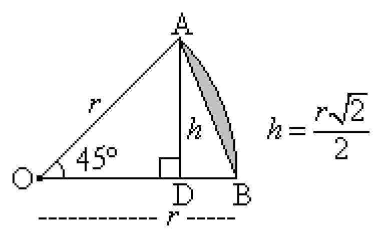
$$= \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360º} - \frac{r^2}{4} = \frac{{}^{1}\cancel{30} \bullet \pi r^2}{\cancel{360º}_{12}} - \frac{r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4}$$

Y podemos expresar el área del segmento circular en función de r.

No es necesario memorizarla, sino más bien recordar lo necesario para deducirla.

iv) En el caso de que el ΔOAB sea isósceles con **α = 45º**. Fig. de la derecha:

- En el ΔOAD rectángulo
  $sen\, 45º = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{r} \Rightarrow \boxed{h = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$
- el área de ΔOAB es $A = \frac{hb}{2} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2} \bullet r}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{4}$



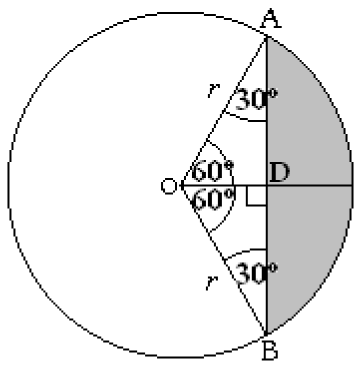
Y el Área segmento circular = área del sector circular – área del ΔOAB

$$=\frac{\alpha\bullet\pi r^2}{360^\circ}-\frac{r^2\sqrt{2}}{4}=\frac{{}^{1}\cancel{45^\circ}\bullet\pi r^2}{\cancel{360^\circ}_{9}}-\frac{r^2\sqrt{2}}{4}=\frac{\pi r^2}{9}-\frac{r^2\sqrt{2}}{4}$$

Y podemos expresar el área del segmento circular en función de r.

v) Si el ΔOAB es isósceles con **α = 120º**, tendremos que:

- Trazar la bisectriz de α = 120º, la cual coincide con la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ y contiene la altura bajada del vértice O.



- Se forman así los Δs congruentes OAD y OBD, con ∢s del centro de 60º cada uno, así como uno recto en D y el ángulo agudo restante, en los Δs congruentes OAD y OBD miden necesariamente 30º. Pues, recordemos que en todo Δrectángulo, los ∢s agudos han de ser complementarios –suman 90º.

  Véase la figura de la derecha.
  Recordemos que en TODO Δ rectángulo, el lado que se opone al ángulo de 30º mide SIEMPRE la mitad que la hipotenusa, en este caso, que el radio. Es decir, **la altura *h* mide *r* /2**.

- Podemos usar como área de cada uno de los Δs congruentes OAD y OBD y rectángulos en D, el semiproducto de los catetos. Pero nos falta la medida, por ejemplo, en el ΔOBD, del cateto $\overline{BD}$. Para ello usamos en el Pitágoras.

$$r^2=OD^2+DB^2$$

$$r^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+DB^2\Rightarrow DB^2=r^2-\frac{r^2}{4}=\frac{3r^2}{4}\Rightarrow DB=\frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Luego, el área del ΔOBD es:

$$A=\frac{OD\bullet DB}{2}=\frac{\frac{r}{2}\bullet\frac{r\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{r^2\sqrt{3}}{8}$$

Y como $\text{área}\Delta_{OAB}=\text{área}\Delta_{OBD}+\text{área}\Delta_{OAD}=2\bullet\frac{r^2\sqrt{3}}{8}=\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

Tenemos que:
Área segm circular = área del sector circular – área del ΔOAB

$$=\frac{\alpha\bullet\pi r^2}{360^\circ}-\frac{r^2\sqrt{3}}{8}=\frac{{}^{1}\cancel{120}\bullet\pi r^2}{\cancel{360^\circ}_{3}}-\frac{r^2\sqrt{3}}{8}=\frac{\pi r^2}{3}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

La expresión del área del segmento circular depende solo del radio r.

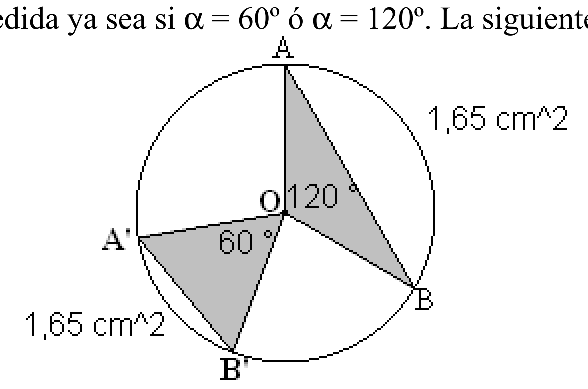
5.1. Tabla de áreas de Δs OAB en segmentos circulares

Ángulos	Fórmula del ΔOAB
30º	$\frac{r^2}{4}\sqrt{1}=\frac{r^2}{4}$
45º	$\frac{r^2}{4}\sqrt{2}$
60º	$\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$
90º	$\frac{r^2}{4}\sqrt{4}=\frac{r^2\cancel{2}}{{}_{2}\cancel{4}}=\frac{r^2}{2}$

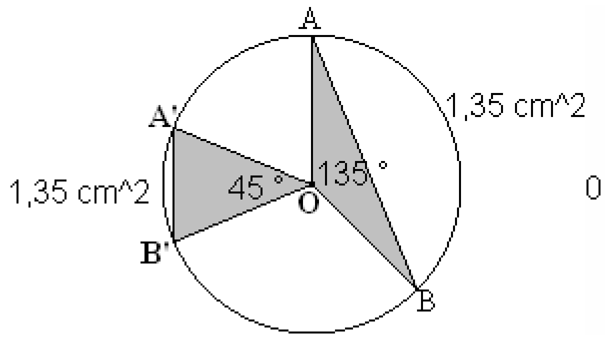
Nótese la regularidad del factor constante $\frac{r^2}{4}$ y de las raíces: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ que hay de 30º a 90º en las expresiones de las áreas para cada ΔOAB.
Recordarlo puede facilitar todo el cálculo de lo que debemos restar al sector circular, al momento de obtener el área de un segmento circular.

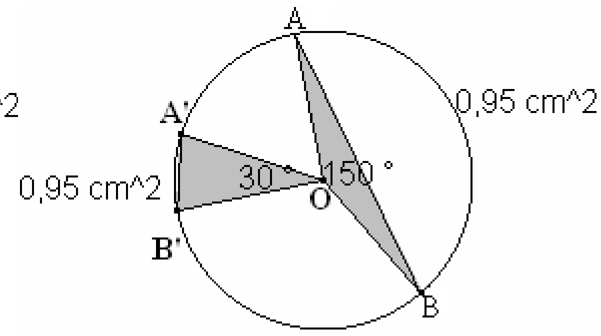
5.2. Relaciones de Áreas en Δs OAB de ángulos del centro suplementarios

Además, habíamos hallado que la áreas de Δs AOB de 60º y 120º tienen la misma fórmula o expresión para el área en función solo del radio, no ya de α. Es decir, sus áreas tienen igual medida ya sea si α = 60º ó α = 120º. La siguiente figura lo confirma:



También ocurre una igualdad de áreas de triángulos en otras parejas de ángulos:





El punto para recordar es *notar y recordar*, que: **las parejas de ángulos son suplementarios** y que ellos **define áreas de Δs OAB iguales entre sí.**

Así por ejemplo, si al hallar el área de un segmento circular nos hallamos con que debemos restar de un segmento circular, un área de ΔOAB cuyo ángulo del centro mide 150º, bastará entonces recordar el área para el ángulo del centro de 30º, – ya que 150º + **30º** = 180º, con la tabla de áreas que nuevamente me tomo la confianza de presentar:

Tabla de áreas de Δs OAB en segmentos circulares

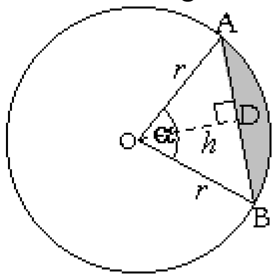
Ángulos	Fórmula de Áreas de Δs OAB
30º	$\frac{r^2\sqrt{1}}{4}=\frac{r^2}{4}$
45º	$\frac{r^2\sqrt{2}}{4}$
60º	$\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$
90º	$\frac{r^2\sqrt{4}}{4}=\frac{r^2\bullet\cancel{2}}{2\cancel{4}}=\frac{r^2}{2}$

Inspirada en una regla "nemotécnica" de la trigonometría.

5.3. Perímetros de bases AB en triángulos AOB

<u>Para obtener el perímetro de cada segmento circular, debemos hallar o conocer el perímetro de la base AB del triángulo AOB</u>

La función trigonométrica seno nos da las respuestas para tales perímetros.



La función seno de define como el cociente del lado opuesto a un ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo al cual pertenecen.

Por esto, trazamos la altura desde O hasta la base $\overline{AB}$, formándose dos Δs congruentes. La altura h bajada desde el vértice del centro, coincide con la bisectriz y la mediatriz. Esto quiere decir, que: $\overline{AB} = \overline{BD}$ y cada uno de los dos Δs congruentes tiene un ángulo del centro igual a $(\alpha/2)$.

En el ΔODB:

$$\text{sen}(\alpha/2) = \frac{\text{lado opuesto al}(\alpha/2)}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{DB}}{r} \quad \Rightarrow \text{DB} = r\,\text{sen}(\alpha/2)$$

$$\Rightarrow \text{AB} = 2r\,\text{sen}(\alpha/2)$$

El perímetro del segmento circular viene dado por la suma de los perímetros de la base rectilínea $\overline{AB}$ y curvilínea del arco $\overset{\frown}{AB}$.

Es decir, la expresión del perímetro del segmento circular, cuyo ángulo central es α tiene por expresión:

$$\boxed{P = 2r\,sen(\alpha/2) + \frac{2\pi r \bullet \alpha}{360^o}}$$

La que nos muestra que debemos tener presente SIEMPRE al momento de obtener el perímetro de segmentos circulares: que si el sector circular o ΔAOB tienen un ángulo central α, el perímetro de la parte rectilínea es con $\text{sen}(\alpha/2)$.

Es bueno tener presente el cuadro que facilita la obtención de algunos valores de la función seno. Razón o cociente entre el lado opuesto a un ángulo y su hipotenusa al interior de un triángulo rectángulo.

Ángulos	seno
30º	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

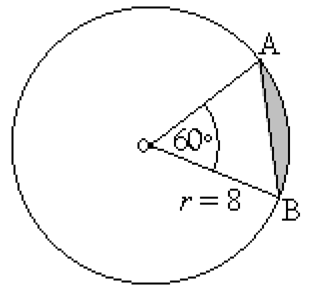
Tabla de perímetros de bases $\overline{AB}$ de Δs OAB y de segmentos circulares

Ángulos	Fórmula del ΔOAB	Perímetro segmento circular
30º	$\text{AB} = 2r\,sen\,15^o \approx 0,52\,r$ con calculadora científica.	$\frac{30^o \bullet 2\pi r}{360^o} + 2r\,sen\,15^o \approx \frac{\pi r}{6} + 0,52\,r$
45º	$\text{AB} = 2r\,sen\,22,5^o \approx 0,77\,r$ Usando calculadora científica para obtener seno de 22,5º.	$\frac{45^o \bullet 2\pi r}{360^o} + 2r\,sen\,22,5^o \approx \frac{\pi r}{4} + 0,77\,r$
60º	$\text{AB} = 2r\,sen\,30^o = \cancel{2}r \bullet \frac{1}{\cancel{2}} = r$	$\frac{60^o \bullet 2\pi r}{360^o} + 2r\,sen\,30^o = \frac{\pi r}{3} + r$
90º	$\text{AB} = 2r\,sen\,45^o = 2r \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,r$	$\frac{90^o \bullet 2\pi r}{360^o} + 2r\,sen\,45^o = \frac{\pi r}{2} + \sqrt{2}\,r$
120º	$\text{AB} = 2r\,sen\,60^o = 2r \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,r$	$\frac{120^o \bullet 2\pi r}{360^o} + 2r\,sen\,60^o = \frac{2\pi r}{3} + \sqrt{3}\,r$

Listado N°1 de Ejercicios (Resueltos) relativos a Segmentos Circulares

Halle el área y perímetro de cado uno de los siguientes segmentos circulares sombreados.

1. o centro de la circunferencia.



Solución:

El área del sector circular:

60° grados es la sexta parte del círculo, así que, en cm²:

$$A = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\overset{32}{\cancel{64}}\pi}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{32\pi}{3} = 10,\overline{6}\,\pi$$

Área del Δ OAB: 60° ocupa la tercera posición de la tabla, esto es, le acompaña una $\sqrt{3}$ al factor constante $\frac{r^2}{4}$. Es decir, el área en cm² es:

$$A_{\Delta OAB} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

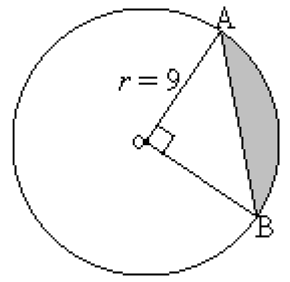
Y **el área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas indicadas.

$$A = \left(\frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2 = \left(10,\overline{6}\ \pi - 16\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$$

El perímetro, en cm, viene dado por:

$$P = 2r\ \text{sen}\ 30° + \frac{2\pi r \bullet \overset{1}{\cancel{60°}}}{6\cancel{360°}} = \cancel{2} \bullet 8 \bullet \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}\pi \bullet 8}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \left(8 + \frac{8\pi}{3}\right)\ \text{cm}$$

2. o centro de la circunferencia.



Solución:

El área del sector circular:

90° grados es la cuarta parte de 360°, así que, en cm² es:

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{91\pi}{4} = 22,75\ \pi$$

Área del Δ OAB:

90° ocupa la cuarta posición en la tabla anterior, asi que acompaña una $\sqrt{4}$ al factor $\frac{r^2}{4}$.

Es decir, en cm²:

$$A_{\Delta OAB} = \frac{r^2\sqrt{4}}{4} = \frac{r^2 \bullet \cancel{2}}{2\cancel{4}} = \frac{r^2}{2} = \frac{81}{2} = 40,5$$

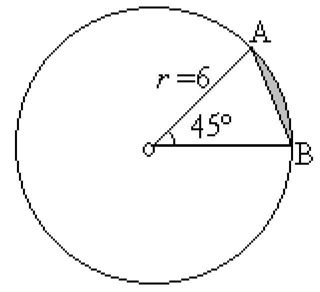
Y **el área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas indicadas.

$$A = \left(22,75\,\pi - 40,5\right)\ \text{cm}^2$$

El perímetro, en cm, viene dado por:

$$P = 2r\ \text{sen}45° + \frac{2\pi r \bullet 90°}{360°} = \cancel{2} \bullet 9\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}\pi \bullet 9 \bullet \overset{1}{\cancel{90°}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\cancel{360°}} = \left(9\sqrt{2} + \frac{9\pi}{2}\right)\ \text{cm}$$

3. o centro de la circunferencia.



Solución:

El área del sector circular:

45° grados es la octava parte del círculo, así que su área es, en cm²:

$$A = \frac{\pi r^2}{8} = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2} = 4,5\pi$$

Área del Δ OAB:

45° ocupa la 2da posición de la tabla, esto es, le acompaña una $\sqrt{2}$ al factor constante $\frac{r^2}{4}$.

Es decir:

$$A_{\Delta OAB} = \frac{r^2\sqrt{2}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

en cm².

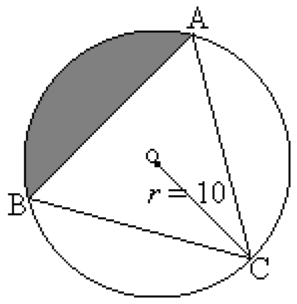
Y **el área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas indicadas.

$$A = \left(\frac{9\pi}{2} - 9\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2 = \left(4,5\,\pi - 9\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$$

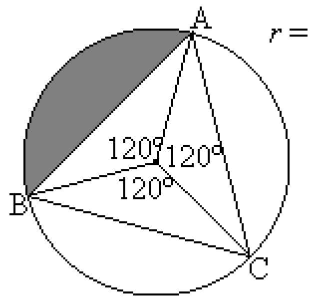
El perímetro, en cm, viene dado por:

$$P = 2r\ \text{sen}\left(\alpha/2\right) + \frac{2\pi r \bullet \alpha}{360°} = 2 \bullet 6\ \text{sen}\ 22,5° + \frac{\cancel{2}\pi \bullet \overset{3}{\cancel{6}}}{8\overset{2}{\cancel{4}}} = \left(12\ \ \text{sen}\ 22,5° + \frac{3\pi}{2}\right)\ \text{cm}$$

4. El ΔABC es equilátero. La unidad de medida está en m.



Solución:
El triángulo equilátero define tres triángulos con $\sphericalangle s$ del centro de 120°.



120° equivale a la tercera parte del círculo, por lo tanto::

$$A_{sect\odot} = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{100\pi}{3}\ m^2 = 33,\bar{3}\ \pi\ m^2$$

Y 120° y 60° son suplementarios. Sus "Δ AOB" tienen factor $\sqrt{3}$.

$$\text{Area } \Delta OAB = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\ m^2 = \frac{100\sqrt{3}}{4}\ m^2 = 25\sqrt{3}\ m^2$$

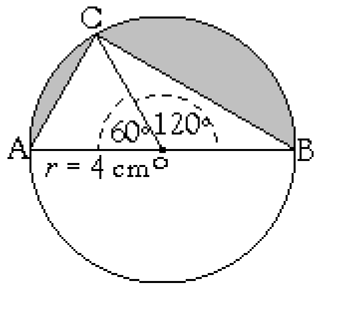
Finalmente, el área de la zona sombreada es:

$$A = \left(33,\bar{3}\pi - 25\sqrt{3}\right)\ m^2$$

El perímetro, en *m*, viene dado por:

$$P = 2r\ \text{sen}\left(\alpha/2\right) + \frac{2\pi r \bullet \alpha}{360°} = \cancel{2}\bullet 10\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{2\pi\bullet 10}{3} = \left(10\sqrt{3} + \frac{20\pi}{3}\right)\ \text{cm}$$

5. $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o.



Solución:
Tenemos dos sectores circulares unidos forman media circunferencia:

$$A_{semi\odot} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\bullet 16}{2}\text{cm}^2 = 8\pi\ \text{cm}^2$$

Y **las áreas de los Δ AOC y ΔBOC son iguales,** pues 60° y 120° son $\sphericalangle$s suplementarios.
60° ocupa la **3era** posición de la tabla, esto implica que le acompaña un $\sqrt{3}$ al factor constante $r^2/4$.
Es decir, (en cm^2):

$$A_{\Delta AOC} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

La suma de áreas de ambos triángulos es el doble:

$$A_{\Delta s} = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

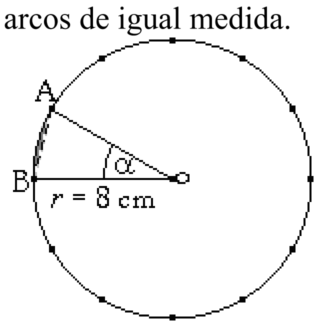
El **área de los dos segmentos circulares** es la diferencia entre las áreas de los sectores y los triángulos:

$$A = \left(8\pi - 8\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2 = 8\left(\pi - \sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$$

El perímetro, en cm, de los dos segmento es:

$$P = 2\bullet 4\ \text{sen}(60°/2) + 2\bullet 4\ \text{sen}(120°/2) + \frac{2\pi\bullet 4}{6} + \frac{2\pi\bullet 4}{3}$$
$$= 8\bullet\frac{1}{2} + 8\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} = \left(4 + 4\sqrt{3} + 4\pi\right)\text{cm}$$

6. La circunferencia de centro o ha sido dividida en doce arcos de igual medida.



Solución:
El área del sector circular oAB:

$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{12} = 30°$$

Con n = 12 arcos en que se dividió la $\odot$. Esto nos indica que un sector circular **es la doce ave parte** del círculo.

Por lo tanto, el área de tal sector circular es entonces:

$$A = \frac{\pi r^2}{12} = \frac{\pi\bullet {}^2\cancel{8}\bullet 8}{\cancel{12}_3}\ cm^2 = \frac{16\pi}{3}\ cm^2 = 5,\bar{3}\pi\ \text{cm}^2$$

Área del Δ OAB: α = 30°

$$\Rightarrow A_{\Delta OAB} = \frac{r^2}{4}\sqrt{1} = \frac{{}^2\cancel{8}\bullet 8}{\cancel{4}}\ cm^2 = 16\ cm^2$$

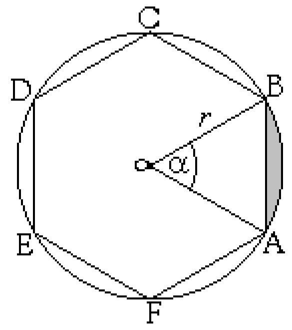
Y **el área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas indicadas.

$$A = \left(5,\bar{3}\pi - 16\right)\ cm^2$$

El perímetro, en cm, viene dado por:

$$P = 2r\ \text{sen}\left(\alpha/2\right) + \frac{2\pi r\bullet\alpha}{360°} = 2\bullet 8\ \text{sen}\ 15° + \frac{2\pi\bullet\cancel{8}^2}{{}_3\cancel{12}} = \left(16\ \text{sen}\ 15° + \frac{4\pi}{3}\right)\ cm$$

7. ABCDEF polígono regular inscrito en la circunferencia de centro o. R = OA = OB = 3 *cm*.



Solución:

El área del sector circular oAB:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Donde n es la cantidad de lados del polígono regular inscrito. En nuestro caso, n = 6. Esto nos indica que el sector circular **es la sexta parte** de los 360° del círculo.

Por lo tanto, el área de tal sector circular -formado por el polígono regular es, entonces:

$$A = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi \bullet {}^{1}\cancel{3} \bullet 3}{\cancel{6}_{2}}\ cm^2$$
$$= \frac{3\pi}{2}\ cm^2$$

Área del Δ OAB: α = 60°

$$\Rightarrow A_{\Delta OAB} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4} cm^2$$

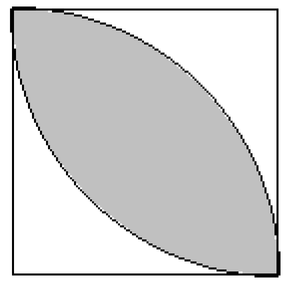
Y **el área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas indicadas.

$$A = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) cm^2$$

El perímetro, en cm, viene dado por:

$$P = 2r \operatorname{sen}(\alpha/2) + \frac{2\pi r \bullet \alpha}{360^\circ}$$
$$= 2 \bullet 3 \operatorname{sen} 30^\circ + \frac{\cancel{2}\pi \bullet \cancel{3}}{\cancel{6}}$$
$$= \left(\cancel{2} \bullet 3 \bullet \frac{1}{\cancel{2}} + \pi\right) cm$$
$$= (3 + \pi)\ cm$$

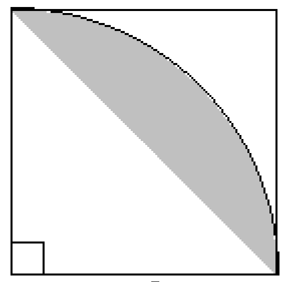
8. El fondo es un cuadrado de lado 3 *cm*.



Solución:

La zona sombreada son dos segmentos circulares. Unidos en el eje de simetría del cual es parte una diagonal del cuadrado.

Hallemos primero la medida de un segmento



$r = 3\ cm$

El área del sector circular de la figura de arriba es:

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{9\pi}{4}\ cm^2$$

El área del Δ(rect) que debemos restar tiene el factor $\sqrt{4} = 2$ al factor r^2 /4.

$$A_\Delta = \frac{r^2}{4} \bullet \cancel{2} = \frac{9}{2}\ cm^2$$

La diferencia de tales áreas es:

[(9/4) π − (9/2)] cm^2

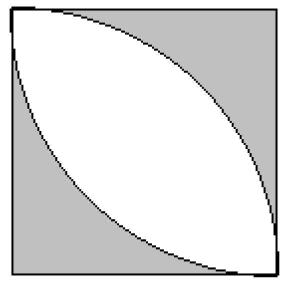
Y el área pedida, dos segmentos, es el doble:

A= [(9/2) π − 9] cm^2

El perímetro son dos cuartos (invertidos) de ⊙ igual a media ⊙.

$$P = \cancel{2}\,\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{4}} = \pi r = 3\pi\ cm$$

9. El fondo es un cuadrado de lado 3 *cm*.



Solución:

El área de un cuadrado de lado a es $A_\square = a^2$.

En nuestro caso, a = 3 *cm*.

Así:

$$A_\square = (3\,cm)^2 = 9\,cm^2$$

Al cual debemos restar el área obtenido precisamente en el ejercicio anterior.

El área final es:

$$A = 9 - (4,5\,\pi - 9)\ cm^2$$
$$= (18 - 4,5\,\pi)\ cm^2$$

La diferencia es positiva, veámoslo al reemplazar π por 3,14.

$$(18 - 4,5 \bullet 3,14)\ cm^2$$
$$= (18 - 14,13)\ cm^2$$
$$= 3,87\,cm^2$$

Es claro que para resolver este ejercicio, era necesario plantearse y resolver el anterior.

El perímetro de la región sombreada tiene contiene la medida de la parte curvilínea del resultado al ejercicio anterior (media circunferencia) más la parte rectilínea (los 4 lados del cuadrado).

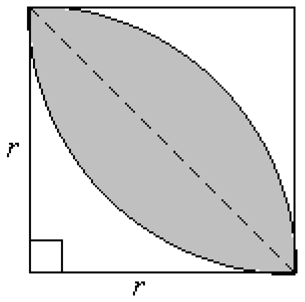
$$P = 4a + \pi r = (12 + 3\pi)\ cm$$

5.5. ¡Flor de Ejercicios! Listado Nº 2 de Ejercicios (Resueltos)

El penúltimo ejercicio de la página anterior es la base de un tema literalmente florido de ejercicios, como los siguientes.

Hallar el área y perímetro de flores de n pétalos.

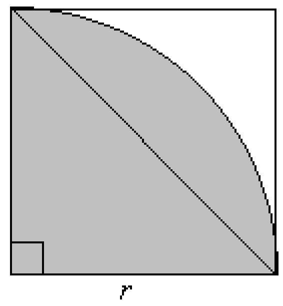
1. Un pétalo de flor.



Solución:

Debemos considerar el eje de simetría del cual es parte una diagonal del cuadrado.

Hallamos primero la medida de un segmento circular, notando que lo esencial es ver el cuarto de un círculo.



El área del sector circular es:

$$A_{1\,\text{sect}\odot} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Y el área del Δ(rect) que debemos restar, con 90º en un vértice, tiene el factor $\sqrt{4} = 2$ acompañando al factor $r^2/4$.

$$A_\Delta = \frac{r^2}{4} \bullet \cancel{2} = \frac{r^2}{2}$$

La diferencia de tales áreas es:

$$A_{1\,\text{segm}\odot} = A_{1\,\text{sect}\odot} - A_\Delta = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$$

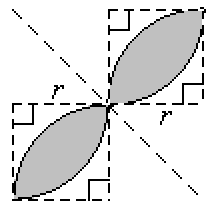
$$= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Y el área pedida es el doble del área hallada:

$$A_{1\,\text{pétalo}} = A_{2\,\text{segm}\odot\text{s}} = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

El perímetro son 2 cuartos de circunferencia (invertidos entre sí), que distribuidos convenientemente forman **1** mitad. $P_{1\,\text{pétalo}} = \cancel{2}\,\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{4}} = \pi r$

2. Flor de dos pétalos.
El fondo son dos cuadrantes de radio r.



Solución:

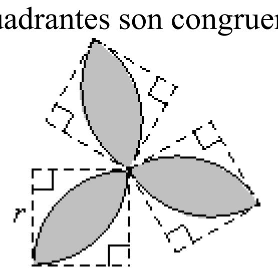
Claramente, solo se trata de duplicar el área y perímetro de la figura anterior. Pues tenemos dos cuadrantes de radio r, que es un valor cualquiera.

$$A_{2\,\text{pétalos}} = A_{4\,\text{segm}\odot\text{s}} = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

O bien : $= r^2(\pi - 2)$

El perímetro son 4 cuartos (invertidos) de ⊙, lo que forman **2** medias ⊙s, o bien, **1** ⊙ . El doble de medida que el ejercicio anterior. $P_{2\,\text{pétalos}} = 2\pi r$

3. Flor de tres pétalos.
Los tres cuadrantes son congruentes.



Solución:

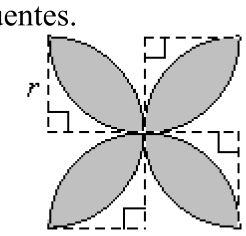
Área: Claramente, solo se trata de triplicar el área y perímetro del ejercicio 1.

$$A_{3\,\text{pétalos}} = A_{6\,\text{segm}\odot\text{s}} = 3r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

El perímetro son 6 cuartos (invertidos) de ⊙, lo que forman **3** medias ⊙s.

$$P_{3\,\text{pétalos}} = 3\pi r$$

4. Flor de cuatro pétalos. Los cuadrantes son congruentes.

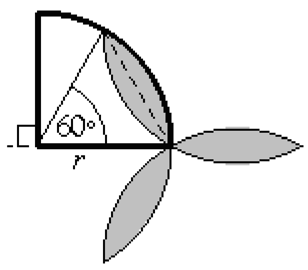


Solución:

Amplificamos por 4 los resultados del ejerc.1. Y hasta aquí únicamente se pueden amplificar. **Más de 4 pétalos** *cuyos vértices ocupen todo un cuadrante* se superpondrían entre sí, **no serían posibles**.

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

5. Flor de tres pétalos congruentes.



Solución:

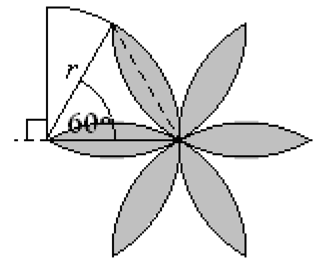
Considerando la simetría central, hallaremos primero el área de un pétalo.
Para esto, debemos primero considerar uno de los segmentos circulares de los dos que lo componen y luego duplicar su medida.
Remitiéndonos al cuadrante de la figura.

$$A_{1\,\text{segm}\,\odot} = A_{1\,\text{sect}\,\odot} - A_{\Delta_{60^\circ}}$$
$$= \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\overset{/\bullet 2}{\Rightarrow} A_{1\text{pét}} = 2\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$\overset{/\bullet 3}{\Rightarrow} A_{3\text{pét}} = 6\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$\text{O bien :} \quad = r^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

El perímetro está compuesto por la parte curvilínea de seis sextas partes de ⊙s. Sextas partes porque cada una está formada con un ángulo del centro de 60°.
Así que:

$$P = \cancel{6}\,\frac{2\pi r}{\cancel{6}} = 2\pi r$$

6. Flor de seis pétalos congruentes.



Solución:

Aquí solo debemos considerar la simetría central respecto al ejercicio anterior y si, podemos duplicar los resultados del ejercicio anterior.
Pero ojo, no se puede considerar 9, 12, 15,… pétalos con objeto de amplificar en tales casos los resultados del ejercicio 5.
¿Porque con 6 pétalos si?
La respuesta se debe a que $6 \bullet 60^\circ = 360^\circ$
6 es el número de rotaciones que cubre un pétalo formado con 60° en una círculo, sin superponer pétalos. Es también el número máximo de pétalos que se puede formar con la simetría central de los 3 pétalos **tomados todos a la vez,** del ejercicio anterior, sin superposición de ellos.

Por lo tanto, si:

$$A_{1\text{pet}} = 2\left(A_{\text{sect}\,\odot} - A_{\Delta_{60^\circ}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$A_{6\text{pet}} = 12\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= r^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Y el perímetro es:

$$P = 2 \bullet 2\pi r = 4\pi r$$

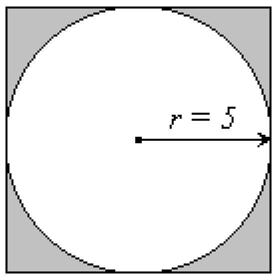
6. CIRCUNFERENCIAS Y CÍRCULOS EN UN CUADRADO COMO FONDO

Una superficie puede estar compuesta por distintas figuras geométricas. Las con un cuadrado como fondo, resulta ser un tema de presentación muy usual en la literatura matemática. Su derivación a otros polígonos, particularmente cuadrados, sigue las mismas ideas de resolución que veremos ahora.

Listado Nº 3 de Ejercicios (Resueltos)

Halle el área y perímetro de cada una de las siguientes figuras sombreadas. Suponga la unidad de medida en *cm*.

1. La circunferencia está inscrita en el cuadrado.



Solución:

Área de la región sombreada:

La medida de cada lado del cuadrado coincide con el diámetro de la ⊙ y esta a su vez equivale el doble que el radio.

En nuestro caso, si a es la medida de cada lado:

$a = 2r = 10$ cm

La figura sombreada resulta de restar el área del círculo de radio *r*, al del cuadrado de lado *a*.

Esto es:

$$\begin{aligned} A &= a^2 - \pi r^2 \\ &= \left(10^2 - \pi \bullet 5^2\right) \text{cm}^2 \\ &= (100 - 25\pi) \quad \text{cm}^2 \\ &= 25(4 - \pi) \quad \text{cm}^2 \end{aligned}$$

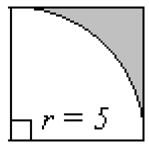
(Tras factorizar por 25 la expresión anterior).

Perímetro de la región sombreada:

El perímetro de la figura achurada es la suma de los perímetros del cuadrado y de la circunferencia que lo delimitan.

$$\begin{aligned} P &= 4a + 2\pi r \\ &= (4 \bullet 10 + 2 \bullet 5\pi) \text{ cm} \\ &= (40 + 10\pi) \quad \text{cm} \end{aligned}$$

2. La circunferencia está inscrita en el cuadrado.

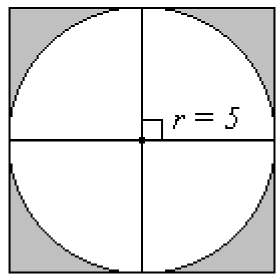


Solución:

Área de la región sombreada:

El área de la figura achurada se puede resolver viéndolo o interpretándola de dos maneras distintas.

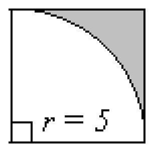
1ero: Como la cuarta parte de la diferencia entre las áreas del ejercicio anterior:



Es decir, se puede derivar su resultado del ejercicio previo.

$$A = \frac{a^2 - \pi r^2}{4} = \frac{(100 - 25\pi)}{4} \text{ cm}^2 = \frac{25}{4}(4 - \pi) \quad \text{cm}^2$$

2do: También se puede hallar el área interpretando la figura achurada como la diferencia entre las áreas de un cuadrado de lado a = 5 cm



y la cuarta parte de una circunferencia de radio r = 5 cm.

$$A = a^2 - \frac{\pi r^2}{4} = \left(25 - \frac{25}{4}\pi\right) \text{cm}^2 = 25\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{cm}^2$$

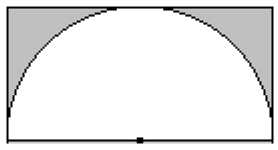
No es la misma expresión del área, hallada en la primera interpretación de la figura achurada, pero si ambas expresiones son equivalentes entre sí.

Perímetro de la región sombreada:

El perímetro que limita la región achurada viene dado por la suma de perímetros del cuadrado de lado a = 5 cm y del arco de ⊙ del primer cuadrante:

$$\begin{aligned} P &= 4a + \frac{2\pi r}{4} \\ &= \left(4 \bullet 5 + \frac{2 \bullet 5\pi}{4}\right) \text{ cm} \\ &= (20 + 2{,}5\ \pi) \quad \text{cm} \end{aligned}$$

3. La semi circunferencia tiene radio $r = 5$ cm.



Solución:

Área de la región sombreada:

Aquí tenemos la diferencia de áreas entre un rectángulo de lados:
$a = 5\ cm$, $b = 10\ cm$ y un semicírculo de radio $r = 5\ cm$.

$$A = ab - \frac{\pi r^2}{2} = \left(5 \bullet 10 - \frac{\pi \bullet 5^2}{2}\right) \text{cm}^2$$

$$= \left(50 - \frac{25\pi}{2}\right)\text{cm}^2 = 25\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\text{cm}^2$$

Donde hemos factorizado por 25 en la última expresión.

Pero también se puede interpretar, si recordamos el ejercicio anterior, como la semidiferencia de áreas entre un cuadrado de lado a = el doble del radio de $\odot$ $= 2r = 10\ cm$
y la $\odot$ de radio $r = 5\ cm$.

$$A = \frac{a^2 - \pi r^2}{2} = \frac{100 - \pi \bullet 5^2}{2}\ \text{cm}^2$$

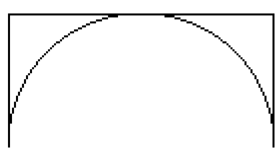
$$= \frac{100 - 25\pi}{2}\ \text{cm}^2 = 50 - \frac{25\pi}{2}\ \text{cm}^2$$

$$= 25\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\text{cm}^2$$

Es interesante que el alumno note en los ejercicios, las variaciones que se desprenden a partir de otros efectuados previamente.
Así como las formas en que puede expresarse un resultado debido por medio de la factorización.

Perímetro de la región sombreada:

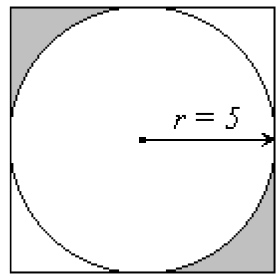
El perímetro de la figura achurada está definido por tres de los lados del rectángulo y por la media circunferencia –sin considerar su diámetro.



$$P = a + b + a + \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}} = (5 + 10 + 5 + 5\pi)\ cm$$

$$= (20 + 5\pi)\ cm$$

4. La circunferencia está inscrita en el cuadrado.



Solución:

Área de la región sombreada:

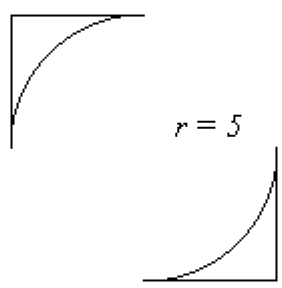
Se desprende de la figura anterior, que solo se ha rotado el sector derecho de la región achurada, sin sufrir variación alguna en el tamaño de la superficie afectada. Esto dado que la circunferencia es tangente en el punto medio de cada lado del cuadrado. Lo que define simetrías en las medidas de las esquinas.
Por lo tanto, el área de la figura resultante es igual al caso anterior.

$$A = ab - \frac{\pi r^2}{2} = \left(50 - \frac{25\pi}{2}\right)\text{cm}^2$$

$$= 25\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\text{cm}^2$$

Perímetro de la región sombreada:

El perímetro está formado por cuatro segmentos rectilíneos de 5 cm cada uno más 2 cuartos del perímetro de una circunferencia de radio $r = 5\ cm$.

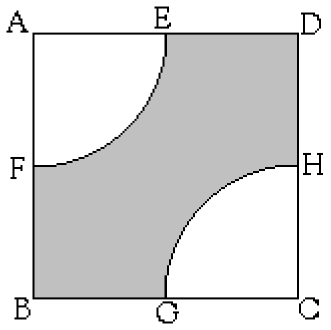


Esto es:

$$P = 4 \bullet 5 + \frac{\cancel{2}^{1}\pi r}{\cancel{4}_{2}} = \left(20 + \frac{5\pi}{2}\right)\ cm$$

$$= (20 + 2,5\pi)\ cm$$

5. ABCD es un cuadrado de lado a = 10 cm. E, F, G y H son puntos medios de cada lado del cuadrado.



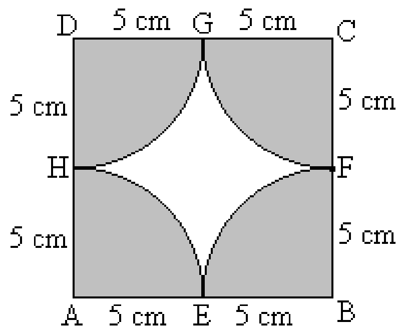
Solución:
Área de la región sombreada:
Los puntos medios nos indican que los vértices A y C son centro de un cuadrante de ⊙s de radios r = 5 cm. Los que en conjunto forman una semicircunferencia con el radio indicado.
Así el área de la región achurada es nuevamente la diferencia entre un cuadrado de lado a = 10 cm. y una semicircunferencia de radio r = 5 cm.

$$A = a^2 - \frac{\pi r^2}{2} = \left(100 - \frac{25\pi}{2}\right)$$
$$= 5\left(4 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}^2$$

Perímetro de la región sombreada:
Viene dado por la **diferencia entre el cuadrado** de lado a = 10 cm y cuatro medios lados que equivalen a 2 **lados**, los que a su vez se suman a dos cuartos de circunferencia que forman entre sí media circunferencia. Esto es:

$$P = 4a - (2a + \pi r)$$
$$= 2a - \pi \bullet 5$$
$$= 20 - 5\pi \quad \text{cm}$$

6.



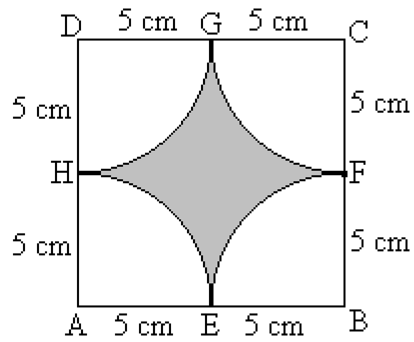
Solución:
Área de la región sombreada:
E, F, G, H son puntos de medios de cada lado del cuadrado. Y cada sector circular es un cuadrante de circunferencia, los cuales unidos, forman un circulo de radio r = 5 cm.
Esto es:

$$A = \pi r^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

Perímetro de la región sombreada:
El perímetro está formado por el cuadrado de lado a = 10 cm y cuatro cuartos de ⊙s que forman una ⊙ de radio r = 5 cm.

$$P = 4a + 2\pi r$$
$$= (4 \bullet 10 + 2\pi \bullet 5) \text{ cm}$$
$$= (40 + 10\pi) \text{ cm}$$

7.



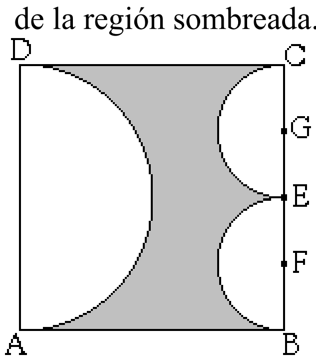
Solución:
Área de la región sombreada:
Del ejercicio anterior se desprende que el área achurada resulta de la diferencia de áreas entre un cuadrado de lado a = 10 cm y un círculo de radio r =5 cm.

$$A = a^2 - \pi r^2$$
$$= (100 - 25\pi) \quad \text{cm}^2$$
$$= 25(4 - \pi) \quad \text{cm}^2$$

Perímetro de la región sombreada:
El perímetro está formado por cuatro cuartos de ⊙s que a su vez, forman una ⊙ completa de radio r = 5 cm.

$$P = 2\pi r \ cm$$
$$= 10\pi \ cm$$

8. ABCD cuadrado de lado $a = 10\ cm$.
E punto medio del lado $\overline{BC}$.
F y G son puntos medios de $\overline{BF}$ y $\overline{FC}$ respectivamente.
Halle el área y perímetro de la región sombreada.



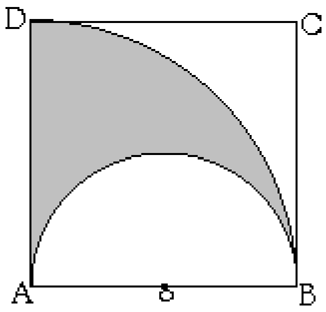
Solución:
Área de la región sombreada:
El área viene formada por la diferencia de áreas entre el cuadrado y los tres semicírculos. El mayor de radio $r = 5$ cm y los dos círculos menores, de radio 2,5 cm = $\frac{5}{2}$ cm. cada uno.

$$
\begin{aligned}
A &= a^2 - \left(\frac{\pi R^2}{2} + \cancel{2}\frac{\pi r^2}{\cancel{2}}\right)\\
&= 100 - \left(\frac{25\pi}{2} + \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)\\
&= 100 - \left(12{,}5\,\pi + \frac{25}{4}\pi\right)\\
&= 100 - (12{,}5\,\pi + 6{,}25\,\pi)\\
&= 100 - 18{,}75\,\pi \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Perímetro de la región sombreada:
Formado por dos lados del cuadrado, una semicircunferencia de radio $R = 5$ cm y dos de radio $r = 2{,}5$ cm.

$$
\begin{aligned}
P &= 2a + \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} + \cancel{2}\frac{2\pi r}{\cancel{2}}\\
&= 2a + \pi R + 2\pi r\\
&= 20 + 5\pi + 2(2{,}5)\pi\\
&= 20 + 10\pi \text{ cm}
\end{aligned}
$$

9. ABCD es cuadrado de lado $a = 10\ cm$ y O es centro de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.



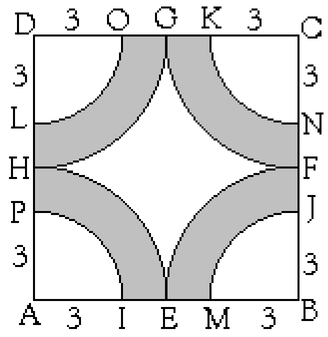
Solución:
Área de la región sombreada:
El cuadrado nos indica que tenemos el cuadrante de un círculo de radio R = 10 cm, al cual debemos restar la superficie de un semicírculo de radio $r = 5$ *cm*.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi r^2}{2}\\
&= \left(\frac{100\pi}{4} - \frac{25\pi}{2}\right) \text{ cm}^2\\
&= \left(25\pi - \frac{25\pi}{2}\right) \text{ cm}^2\\
&= \frac{25\pi}{2} \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Perímetro de la región sombreada:
Viene dado por un lado de $a = 10$ cm., más un cuarto de perímetro de una ⊙ de radio 10 cm y un semiperímetro de radio $r = 5$ cm. Esto es:

$$
\begin{aligned}
P &= a + \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{4}_2} + \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}}\\
&= 10 + \frac{\pi \bullet \cancel{10}^5}{\cancel{2}} + \pi \bullet 5\\
&= 10 + 5\pi + 5\pi\\
&= 10 + 10\pi \text{ cm}\\
&= 10(1+\pi) \text{ cm}
\end{aligned}
$$

10. E, F, G, H puntos medios de los lados de 10 *cm* del cuadrado ABCD.
Halle el área y perímetro de la región sombreada.



Solución:
Área de la región sombreada:
La figura ilustra 4 trapecios circulares que si unimos convenientemente, forman un anillo circular que resulta de dos ⊙ concéntricas –de igual centro. La mayor, de radio $r = 5$ cm y la circunferencia menor, de radio $r = 3$ cm.
El área viene dada por la diferencia de áreas entre los círculos que ambas forman:

$$
\begin{aligned}
A &= \pi R^2 - \pi r^2\\
&= \left(R^2 - r^2\right)\pi\\
&= \left(5^2 - 3^2\right)\pi \text{ cm}^2\\
&= 16\,\pi \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Perímetro de la región sombreada:
Viene dado por el anillo circular que se forma, más 4 segmentos rectilíneos, cada uno congruente al segmento IM = AM – AI = (7–3) cm
= 4 cm.

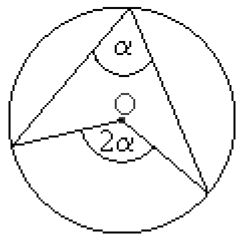
$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi(\mathrm{R}+r) + 4\,\mathrm{IM}\\
&= \left[2\pi(5+3) + 4(7-3)\right] \text{cm}\\
&= (2\pi \bullet 8 + 16) \text{ cm}\\
&= (16\pi + 16) \text{ cm}\\
&= 16(\pi+1) \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

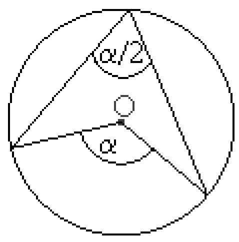
7. COMBINACIÓN DE EJERCICIOS DE ÁREAS Y PERÍMETROS CON PROPIEDADES DE ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Con la combinación de propiedades de ángulos en la circunferencia surgen ejercicios que difícilmente nos pueden dejar indiferentes. Recordemos algunas de estas propiedades:

1. **El ángulo del centro mide el doble que el ángulo inscrito**.

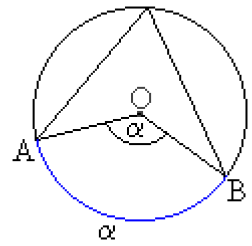


O bien; ***el ángulo inscrito mide la mitad que el ángulo del centro***.

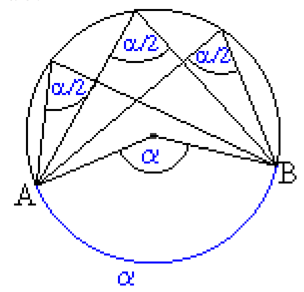


2. **El ángulo del centro subtiende un arco de circunferencia de igual medida que el.**

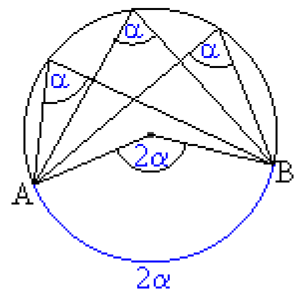
$\overset{\frown}{AB} = \alpha = \sphericalangle AOB$



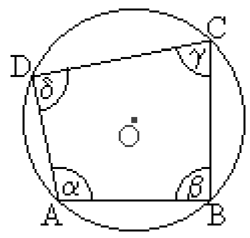
3. **Los ángulos inscritos que subtienden el mismo ángulo del centro** -o arco de circunferencia**, son iguales entre sí y miden la mitad que el ángulo del centro** –así como del arco que subtiende.



O bien, **el ángulo del centro mide el doble que todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco que el**.

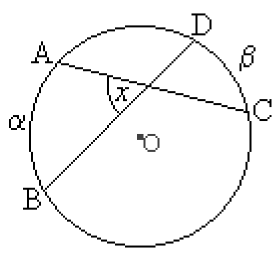


4. **Ángulos opuestos suman 180º en todo cuadrilátero inscrito a una circunferencia.**



En la figura:
$\alpha + \gamma = 180º$
$\beta + \delta = 180º$

5. **Ángulo interior a una circunferencia.**
Un ángulo interior a una circunferencia es aquel ángulo formado por dos cuerdas que se cortan, como se muestra en la figura.
Y su medida se obtiene mediante la fórmula:



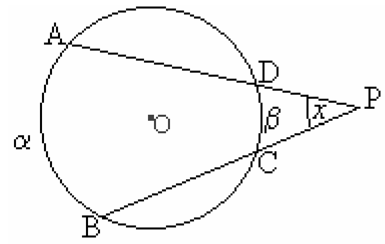
$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

O bien,

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

6. **Ángulo exterior a una circunferencia formado por dos secantes.**
La medida de un ángulo exterior x, formado por dos secantes $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$, se obtiene mediante la fórmula:

$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} \quad \text{O bien:} \quad x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



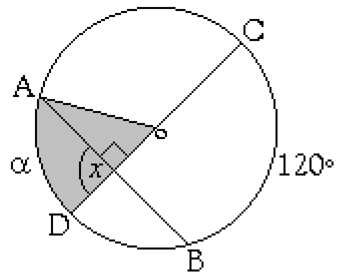
Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Veamos sus aplicaciones a ejercicios de áreas y perímetros en sectores circulares:
EJEMPLOS

Halle el área y perímetro de los sectores circulares sombreados:

1. El ángulo x es interior a la circunferencia de centro o.

$\alpha = \overset{\frown}{AD} = ?$ y $\beta = \overset{\frown}{BC} = 120^\circ$ y el diámetro CD mide 8 *cm*.



Solución:
La figura nos muestra que x es adyacente suplementario al ∢ recto (90°).
Entonces:
$90^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$

Y por ser x ∢ interior, tenemos entonces:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Reemplazando x = 90°:

$$90^\circ = \frac{\alpha + 120^\circ}{2} \quad / \bullet 2 \,/ -120^\circ$$

$$180^\circ - 120^\circ = \alpha$$

$$60^\circ = \alpha$$

⇒ La región sombreada subtiende un arco de 60°. Y la superficie es la sexta parte del círculo, de radio:
r = (8 cm)/2 = 4 cm.

$$\Rightarrow A = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi \bullet 4^2}{6} \text{ cm}^2$$

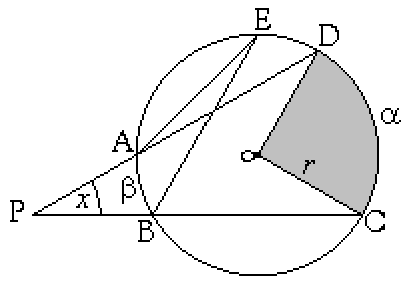
$$= \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^2$$

El perímetro de la sexta parte de la ⊙:

$$P = \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{6}_3} = \frac{\pi \bullet 4}{3} \text{ cm} = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}$$

2. El ángulo x es exterior a la circunferencia de centro o.

$\alpha = \overset{\frown}{CD} = ?$; $\beta = \overset{\frown}{AB} = ?$; ∢AEB = 15°; x = 30°; r = 6 *cm*.



Solución:

$\beta = 2$∢$AEB = 2 \bullet 15^\circ = 30^\circ$

Pues un arco mide el doble que todo ∢ inscrito con el cual subtienda el mismo arco.
Por definición de ángulo exterior a una circunferencia:

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Reemplazando x y β, iguales a 30°, obtenemos:

$$30^\circ = \frac{\alpha - 30^\circ}{2} \quad / \bullet 2 \,/ + 30^\circ$$

$$60^\circ + 30^\circ = \alpha$$

$$90^\circ = \alpha$$

Esto nos dice que la región es la cuarta parte del círculo.
Así que:

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \bullet 6^2}{4}$$

$$= \frac{36}{4}\pi \text{ cm}^2$$

$$= 9\pi \text{ cm}^2$$

Y el perímetro de la cuarta parte de la circunferencia es:

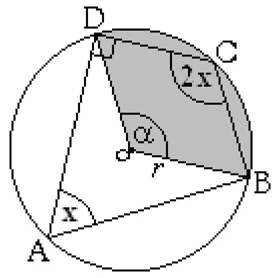
$$P = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \bullet 6}{4} \text{ cm}$$

$$= \frac{12\pi}{4} \text{ cm}$$

$$= 3\pi \text{ cm}$$

3. El cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia de centro o.

El radio r = 18 *cm*.



Solución:
Recordemos que un cuadrilátero inscrito a una ⊙, los ángulos opuestos son suplementarios –suman 180°.
Así, en la figura del recuadro:

$$x + 2x = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ \quad / : 3$$

$$x = 60^\circ$$

Y recordando que el ∢ del centro α, mide el doble que el ángulo inscrito con el cual subtiende el mismo arco $\overset{\frown}{BD}$.
α = 2 ∢ DAB = 2 • 60° = 120°.
Luego, la región achurada es la tercera parte del círculo.
Entonces:

$$A = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{\pi \bullet 18 \bullet \cancel{18}^6}{\cancel{3}} \text{ cm}^2$$

$$= 108\pi \text{ cm}^2$$

$$P = \frac{2\pi r}{3} = \frac{2\pi \bullet \cancel{18}^6}{\cancel{3}} \text{ cm}$$

$$= 12\pi \text{ cm}$$

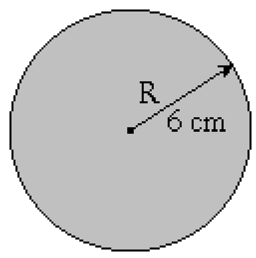
Queda claro que la aplicación de estas propiedades puede combinarse igualmente de manera análoga, mutatis mutandis (cambiando lo que hay que cambiar) en la combinación de cálculo de áreas y perímetros de segmentos circulares.

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Círculos y Circunferencias: Áreas y Perímetros
Listado N° 4 de Ejercicios (Resueltos)

Halle el área y perímetro de las siguientes figuras sombreadas:

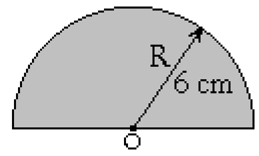
1.



Solución:
El perímetro es:
$P = 2\pi R = 2\pi \bullet 6$ cm
$= 12\pi$ cm

El área es:
$A = \pi R^2 = \pi 6^2$ cm^2
$= 36\pi$ cm^2

2. .

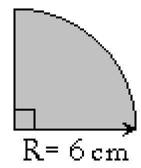


Solución:
Aprovechando los resultados del ejercicio anterior. Para la mitad de la circunferencia.

$P = 6\pi$ cm

$A = 18\pi$ cm^2

3.



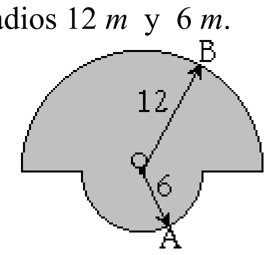
Solución:
Tenemos **la cuarta parte** de un círculo.
Pues bien, las fórmulas del perímetro y del área estarán **divididas por 4**.
El perímetro de la figura en cm es:

$$P = \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{4}_2} = \frac{\pi \bullet \cancel{6}^3}{\cancel{2}} = 3\pi \ cm$$

Y el área es, en cm^2:

$$A = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \bullet 6^2}{4} = 9\pi \text{ cm}^2$$

4. Se tiene dos semicircunferencias concéntricas en O de radios 12 *m* y 6 *m*.



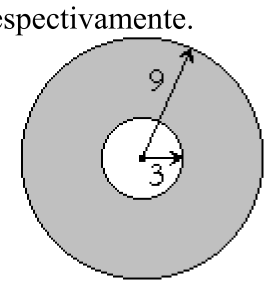
Solución:
El perímetro resulta ser:

$$P = \frac{\cancel{2}\pi(R+r)}{\cancel{2}} = \frac{\pi(12+6)}{2} m$$
$$= 9\pi \ m$$

El área de los dos semicírculos es:

$$A = \frac{\pi\left(R^2+r^2\right)}{2}$$
$$= \frac{\pi\left(12^2+6^2\right)}{2} m^2$$
$$= \frac{180\pi}{2} \ m^2 = 90\pi \ m^2$$

5. Los radios de las circunferencias mayor y menor son 9 *cm* y 3 *cm*. respectivamente.

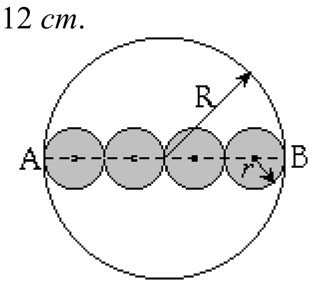


Solución:
La región está limitada por los perímetros de ambas circunferencias.
$P = 2\pi(R+r) = 2\pi(9+3)$ cm
$= 24\pi$ cm

El área de la superficie sombreada resulta de la diferencia de áreas entre los dos círculos.

$$A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$
$$= \pi(81-9)\text{cm}^2 = 72\pi \text{ cm}^2$$

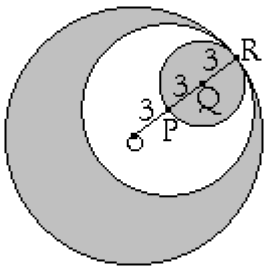
6. Las circunferencias interiores tienen radio *r* y son tangentes con la de al lado. El valor del radio *R* de la figura son 12 *cm*.



Solución:
El perímetro de ⊙s tangentes e interiores a la mayor, cubriendo todo el diámetro $\overline{AB}$ es siempre igual a $2\pi R$.
En este caso, si $R = 12$ cm
$\Rightarrow$ P = 24 π cm.

Cada ⊙ interior tiene un radio $r = R/4 = 3$ cm.
∴ El área de una de ellas es:
$A_{\odot} = \pi \bullet 3^2$ cm^2 $= 9\pi$ cm^2
Y el de las cuatro es entonces:
$A_{4\odot} = 36\pi$ cm^2

7. O, P y Q son centros de circunferencias. R es punto de tangencia de todas ellas. La unidad de medida son *cm*.



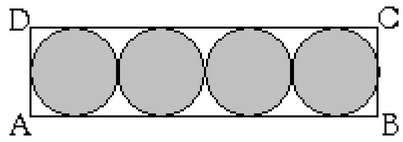
Solución:
La región está limitada por los perímetros de las tres circunferencias, de radios 3, 6 y 9 cm.

$P = 2\pi(3+6+9)$ cm
$= 36\pi$ cm

El área resulta de la diferencia entre las superficies de las ⊙s mayores y luego agregar el área de la ⊙ menor.

$A = \pi\left(9^2 - 6^2 + 3^2\right)$ cm^2
$= 54\pi$ cm^2

8. ABCD es rectángulo. La base $\overline{AB}$ mide 16 *cm*.



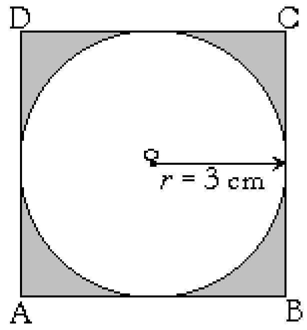
Solución:
Las cuatro circunferencias de la figura son congruentes y el diámetro de cada una de ellas es d= 16 cm/4 = 4 cm.
∴ sus radios miden R = 2 cm.

El área de una de ellas es:
$A_{1\odot} = \pi R^2 = 4\pi$ cm^2

Y al amplificar este resultado por el número de ⊙s presentes obtenemos:
$A = 4 \bullet 4\pi$ cm$^2 = 16\pi$ cm^2.

El perímetro es $2\pi R = 4\pi$ cm.
El de las 4⊙s es 16π cm.

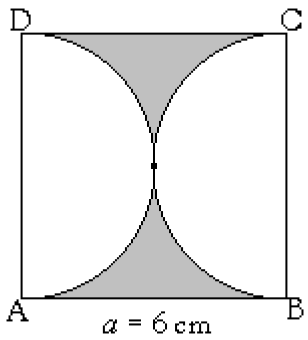
9. ABCD cuadrado y O es centro de la circunferencia de radio r = 3 *cm*.



Solución:
El perímetro queda definido por el cuadrado cuyo lado mide el doble que el radio r y la ⊙. Esto es,
$P = 4a + 2\pi r$
$= (4 \bullet 6 + 2\pi \bullet 3)$ cm
$= (24 + 6\pi)$ cm

El área de la región sombreada resulta de restar al área del cuadrado, la del círculo:
$A = a^2 - \pi R^2$
$= (36 - 9\pi)$ cm^2

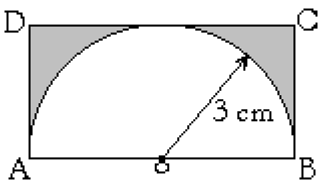
10. Las semi⊙s son tangentes en el centro del cuadrado ABCD.



Solución:
El perímetro de la figura es un cuadrado de lado a = 6 cm y dos semicircunferencias que forman entre sí una de r = 3 cm. El perímetro es así, el mismo que en el ejercicio anterior: $P = (24 + 6\pi)$ cm

Al unir las dos semi⊙s debemos restar a la superficie obtenemos un círculo.
El área es, en *cm*^{2}.
$A = a^2 - \pi R^2 = 36 - 9\pi$

11. ABCD es un rectángulo y O es centro de la semicircunferencia.



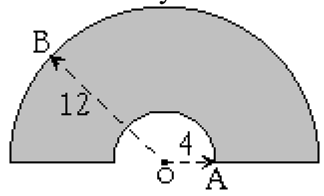
Solución:
Tenemos media ⊙ de R= 3 cm. Y los 2 lados de los costados suman 6 cm y con el de la base superior 12 cm.

$P = (3\pi + 12)$ cm

La superficie sombreada es la diferencia entre la mitad de un cuadrado de lado a = 6 cm y un semicírculo de R = 3 cm.

$A = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}}$
$= \left(\dfrac{6^2}{2} - \pi \bullet 3\right)$ cm^2
$= (18 - 3\pi)$ cm^2

12. OA = 4 *m* y OB = 12 *m*.



Solución:
El perímetro que encierra la región sombreada está definido por dos semi⊙ de radios r = 4 m y R = 12 m. Por lo tanto:

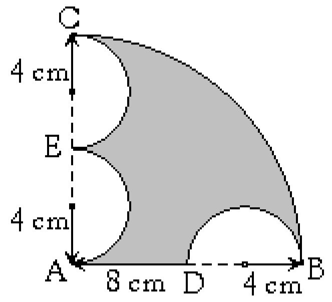
$P = \dfrac{\cancel{2}\pi(R+r)}{\cancel{2}} = \pi(12+4)$ m
$= 16\pi$ m

El área resulta de la resta entre las áreas de ellas dos:

$A = \dfrac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{2} = \dfrac{128\pi}{2}$ m^2
$= 64\pi$ m^2

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

13. $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ radios en un cuadrante de circunferencia.



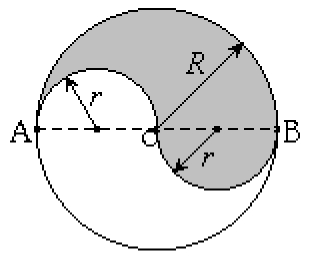
Solución:
El perímetro es la suma de un cuarto de ⊙ de R= 16, las tres semi⊙s de r = 4 y AD = 8.

$$P=\left(\frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{4}_2}+3\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}}+8\right)\text{cm}$$
$$=(20\pi+8)\ \text{cm}$$

El área resulta de la resta:

$$A=\pi\left(\frac{R^2}{4}-3\frac{r^2}{2}\right)$$
$$=40\pi\,\text{cm}^2$$

14. $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o.
$r = 4$ *cm.*



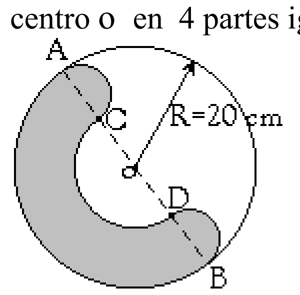
Solución:
La figura nos muestra que:
R =OB= $2r$ = 2 • 4 *cm* = 8 cm.

Y por lo que hemos visto en la presentación de este tipo de ejercicios:
$P = 2\pi R = 16\pi$ cm

Y para n par de semi⊙s a lo largo del diámetro, ellas completan medio círculo.

$$A=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi 8^2}{2}\text{cm}^2$$
$$=32\pi\ \text{cm}^2$$

15. C y D dividen el diámetro $\overline{AB}$ de la circunferencia de centro o en 4 partes iguales.

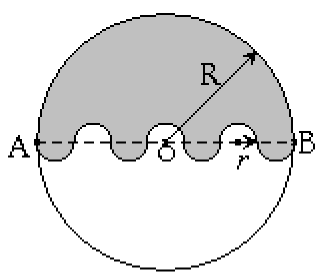


Solución:
El perímetro está formado por:

- 1 semicircunferencia de radio R = OA = OB = **20 cm**.;
- 1 semicircunferencia de radio r = OA = OB = **10 cm**.;
- 2 semicircunferencias que entre sí forman una completa de radio r = AC/2 = OC/2 = (10/2) cm. = **5 cm**;

Es decir, el perímetro es:
P = π(R + r + 2r) = 40 π cm.
El área es, en cm^2:
A= [π(R^2 – r^2)/2] + πr^2
=175 π

16. $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o.
$r = 2$ *cm.*



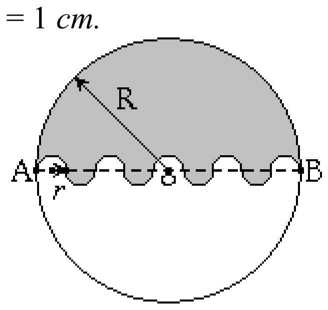
Solución:
La figura nos muestra que:
R =OB=$7r$ =7 • 2 cm = 14 cm.

Y por lo que hemos visto:
$P = 2\pi R = 2\pi \bullet 14 = 28\pi$ cm

Una redistribución de las superficies sombreadas sobrepasaría el medio círculo:

$$A=\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi r^2}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(14^2+2^2\right)\text{cm}^2$$
$$=\frac{\pi}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}^1 00\right)\text{cm}^2$$
$$=100\pi\ \text{cm}^2$$

17. $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o.
$r = 1$ *cm.*



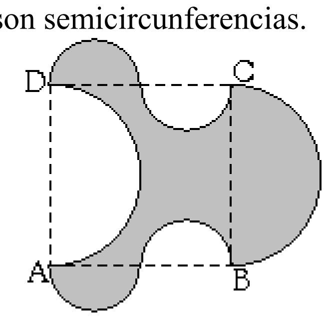
Solución:
La figura nos muestra que:
R =OB=$9r$ =9 • 1 cm = 9 cm.

Y por lo que hemos visto del perímetro de estas formas:
$P = 2\pi R = 2\pi \bullet 9 = 18\pi$ cm

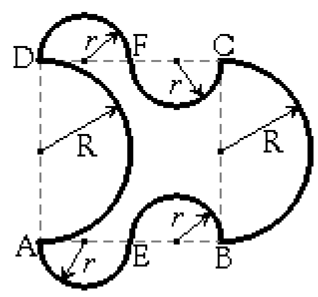
Con la redistribución de los semicírculos grises no se sobrepasa la superficie del medio círculo mayor. Así que

$$A=\frac{\pi R^2}{2}-\frac{\pi r^2}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(9^2-1^2\right)\text{cm}^2$$
$$=40\pi\ \text{cm}^2$$

18. ABCD es un cuadrado de lado a = 12 *cm*. Los arcos son semicircunferencias.



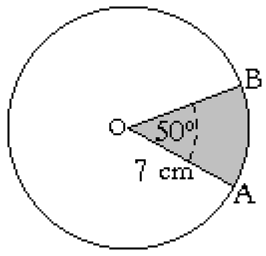
Solución:
Una redistribución de los semicírculos sombreados lograr cubrir el cuadrado ABCD ni más ni menos.
El área es: $A = a^2 = 144\ \text{cm}^2$
El perímetro de la figura es:



P = [2 (2πr) + 2πR] cm
=[2 (2π• 3) + 2π• 6] cm
= 24 π cm

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

19. O centro de la circunferencia



Solución:
Tenemos un sector circular con un ángulo del centro $\alpha = 50$.

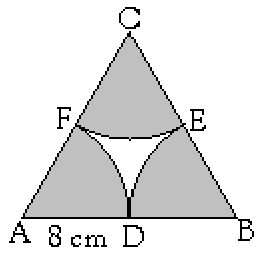
El perímetro resulta ser:

$$P = 2r + \frac{\alpha \bullet 2\pi r}{180}$$
$$= \left(2 \bullet 7 + \frac{50 \bullet 2\pi \bullet 7}{180}\right) \text{cm}$$
$$= \left(14 + \frac{5\cancel{0} \bullet \cancel{2}^{1} \pi \bullet 7}{_{9}\cancel{18}\cancel{0}}\right) \text{cm}$$
$$= \left(14 + \frac{35\pi}{9}\right) \text{cm}$$

El área del sector circular es:

$$A = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360} = \frac{5\cancel{0} \bullet \pi 7^2}{36\cancel{0}} \text{cm}^2$$
$$= \frac{245\pi}{36} \text{ cm}^2$$

20. El ΔABC es equilátero. D, E y F puntos medios de sus lados.



Solución:
Los Δs equiláteros distribuyen sus 180º interiores en tres ángulos del vértice (α) de 60º.
Y cada sector circular tiene un radio r de 8 cm.
Basta entonces hallar el perímetro y área de un solo sector circular y amplificar después cada resultado por tres para obtener lo pedido.
Así, el perímetro de un solo sector circular es:

$$P_1 = 2r + \frac{\alpha \bullet 2\pi r}{360}$$
$$= 2 \bullet 8 + \frac{\cancel{60} \bullet 2\pi \bullet \cancel{8}^{4}}{\cancel{360}\,\cancel{6}^{3}}$$
$$= 16 + \frac{8\pi}{3} \text{ cm}$$

Entonces, el perímetro final es tres veces este valor.

$$P = (48 + 8\pi) \text{ cm}$$

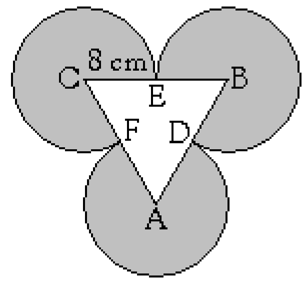
Y el área de un solo sector circular es:

$$A_1 = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360^{\circ}} = \frac{\cancel{60^{\circ}} \bullet \pi 8^2}{\cancel{360^{\circ}}_{6}}$$
$$= \frac{64\pi}{6} \text{cm}^2$$
$$= \frac{32\pi}{3} \text{cm}^2$$

Y tras amplificar por tres, obtenemos el área pedida:

$$A = 32\pi \text{ cm}^2$$

21. El ΔABC es equilátero. D, E y F puntos medios de sus lados.



Solución:
Para este ejercicio serán muy útiles los resultados del ejercicio anterior.
El perímetro está formado por:
- 6 radios ($6r$);
- y la diferencia entre 3 ⊙s iguales $(3 \bullet 2\pi r = 6\pi r)$ y los tres sectores circulares hallados en el ejercicio anterior.

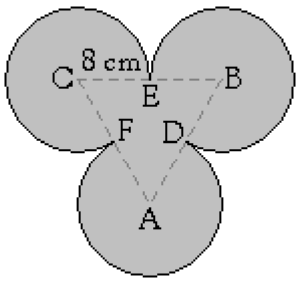
Por lo tanto, el perímetro de la figura es:

$$P = \left[6r + (6\pi r - 8\pi)\right] \text{ cm}$$
$$= \left[48 + 48\pi - 8\pi\right] \text{ cm}$$
$$= (48 + 40\pi) \text{ cm}$$

El área está determinada por la diferencia de áreas entre 3 círculos y los 3 sectores circulares hallados en el ejercicio anterior.

$$A = \left(3 \bullet \pi r^2 - 32\pi\right) \text{cm}^2$$
$$= (3 \bullet \pi \bullet 64 - 32\pi) \text{cm}^2$$
$$= 160\pi \text{ cm}^2$$

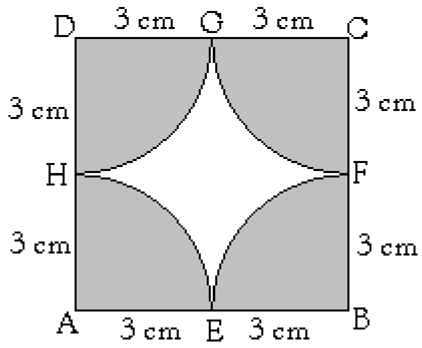
22. El ΔABC es equilátero. D, E y F puntos medios de sus lados.



Solución:
Aquí nuevamente aprovechamos los resultados de los ejercicios anteriores.
El perímetro viene dado por la parte curvilínea del ejercicio anterior.
P = 40 π cm.
Y el área viene dada por la suma obtenida en el ejercicio anterior y el de un "ΔAOB" de 60° y r = 8 cm

$$A = 160\pi + \frac{r^2\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$$
$$= (160\pi + 32\sqrt{3})\ \text{cm}^2$$

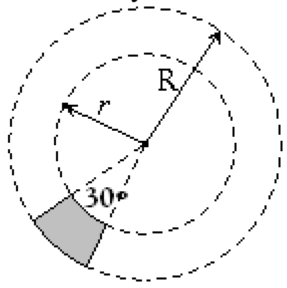
23. E, F, G y H puntos medios de los lados del cuadrado ABCD de lado a = 6 *cm*.



Solución:
El perímetro está formado por los cuatros sectores curvilíneos que unidos convenientemente, forman una ⊙ de radio R = 3 cm. más los 4 lados del cuadrado.
P = 2πR + 4 a = (6π + 24) cm.

El área de la región sombreada resulta de restar al área del cuadrado, la del círculo: $A = a^2 - \pi R^2$
$= (36 - 9\pi)\ \text{cm}^2$

24. R = 6 *m* y r = 4 *m*.



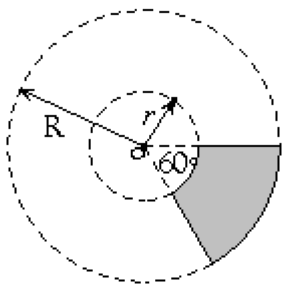
Solución:
El perímetro es:

$$P = \frac{\pi}{12}(R+r) + 2(R-r)$$
$$= \left(\frac{10\pi}{12} + 4\right)\ \text{m}$$
$$= \left(\frac{5\pi}{6} + 4\right)\ \text{m}$$

El área es:

$$A = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{12}$$
$$= \frac{(36-16)}{12}\pi\ \text{m}^2$$
$$= \frac{5}{3}\pi\ \text{m}^2$$

25. R = 10 *cm* y r = 4 *cm*.



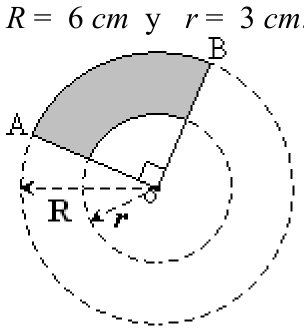
Solución:
El perímetro es:

$$P = \frac{\pi}{6}(R+r) + 2(R-r)$$
$$= \left\{\frac{\pi}{6}(10+4) + 2(10-4)\right\}\text{cm}$$
$$= \left(\frac{7\pi}{3} + 12\right)\ \text{cm}$$

El área es:

$$A = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{6}$$
$$= \frac{(100-16)}{6}\pi\ \text{cm}^2$$
$$= 14\pi\ \text{cm}^2$$

26. R = 6 *cm* y r = 3 *cm*.



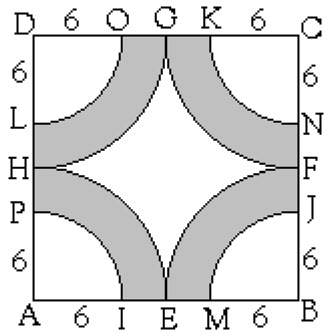
Solución:
El perímetro tiene una parte curvilínea y otra rectilínea.

$$P = \frac{\pi}{2}(R+r) + 2(R-r)$$
$$= \left\{\frac{\pi}{2}(6+3) + 2(6-3)\right\}\text{cm}$$
$$= \left(\frac{9\pi}{2} + 6\right)\ \text{cm}$$

El área es:

$$A = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{4}$$
$$= \frac{36-9}{4}\pi\ \text{cm}^2 = \frac{27}{4}\pi\ \text{cm}^2$$

27. E, F, G, H puntos medios de los lados de 18 *cm* del cuadrado ABCD.



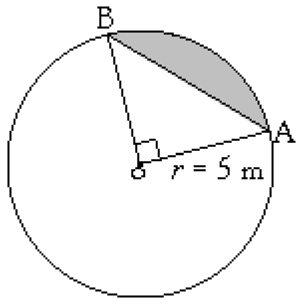
Solución:
Al redistribuir los cuatros cuadrantes tenemos dos ⊙s concéntricas de radio R=9 cm y r = 6 cm. y 4 segmentos rectilíneos congruentes e iguales a IM = AM – AI = (12 –6) cm = 6 cm.
Perímetro de la región sombreada:

$$P = 2\pi(9+6)\ +\ 4\,\text{IM}$$
$$= (30\pi + 24)\,\text{cm}$$

Tenemos diferencia de áreas:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = 45\pi\ \text{cm}^2$$

28. o centro de la circunferencia.



Solución:

Área del sector circular:

90° grados es la cuarta parte de 360°, así que, su área en m^2 es:

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{25\pi}{4} m^2$$
$$= 6{,}25\,\pi\ m^2$$

Área del Δ OAB:

90° ocupa la cuarta posición en la tabla pertinente, asi que acompaña $\sqrt{4}$ al factor $\frac{r^2}{4}$.

Es decir:

$$A_{\Delta OAB} = \frac{r^2\sqrt{4}}{4} = \frac{r^2 \bullet \cancel{2}}{2\cancel{4}} m^2$$
$$= \frac{r^2}{2}$$
$$= \frac{25}{2}\ m^2$$
$$= 12{,}5\ m^2$$

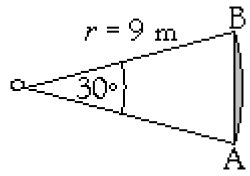
Y el **área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas indicadas.

$$A = (6{,}25\,\pi - 12{,}5)\ \text{cm}^2$$

El perímetro, en cm, viene dado por:

$$P = 2r\,\text{sen}(\alpha/2)° + \frac{2\pi r \bullet \cancel{90°}}{4\cancel{360°}}$$
$$= 2r\,\text{sen}\,45° + \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{4}_2}$$
$$= \left(\cancel{2} \bullet 5\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \frac{\pi \bullet 5}{2}\right)\text{cm}$$
$$= \left(5\sqrt{2} + \frac{5\pi}{2}\right)\ \text{cm}$$

29. o centro de la circunferencia.



Solución:

Área del sector circular:

30° grados es la doce ava parte de 360°, así que, su área en m^2 es:

$$A = \frac{\pi r^2}{12} = \frac{{}^{27}\cancel{81}\,\pi}{\cancel{12}_4} m^2$$
$$= \frac{27}{4}\pi\ m^2$$

Área del Δ OAB:

30° ocupa la primera posición en la tabla pertinente, asi que acompaña $\sqrt{1} = 1$ al factor $\frac{r^2}{4}$.

Es decir: $A_{\Delta} = \frac{r^2}{4} = \frac{81}{4} m^2$

Y el **área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas halladas.

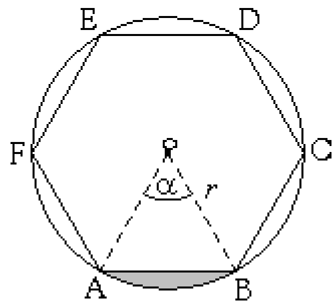
$$A = \left(\frac{27}{4}\pi - \frac{81}{4}\right)\ \text{cm}^2$$

El perímetro, en cm, viene dado por:

$$P = 2r\,\text{sen}(\alpha/2)° + \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{12}_6}$$
$$= 2r\,\text{sen}\,15° + \frac{\pi\, r}{6}$$
$$= \left(2 \bullet 9\,\text{sen}\,15° + \frac{\pi \bullet \cancel{9}^3}{2\cancel{6}}\right)\text{cm}$$
$$= \left(18\ \text{sen}\,15° + \frac{3\pi}{2}\right)\ \text{cm}$$

Nota: No hay expresión racional para sen 15°.
Sólo para 0°, 30°, 45°, 60° y 90°. Para todos estos valores de ángulos con un período múltiplo de 90° y 180°.

30. ABCDEF polígono regular inscrito en la circunferencia de centro o y radio $r = 7\ cm$.



Solución:

Un polígono regular es una figura que tiene todos sus lados de igual medida y tiene la gracia de dividir una circunferencia en n arcos congruentes. Dónde n es la cantidad de lados que tiene el polígono.

En nuestro caso, n = 6. Y el ángulo del centro mide:

$\alpha = 360°/n = 360°/6 = 60°$.

El sector circular mide:

$$A_{\text{sect}\,\odot} = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360°} = \frac{49\pi}{6}\ cm^2$$

El área del ΔAoC que debemos restar viene dado por el producto de los factores que componen la expresión:

$$A_{\Delta} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2 = \frac{49\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

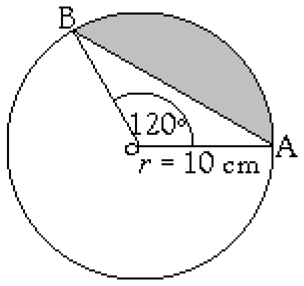
Y el **área del segmento circular** es la diferencia de áreas:

$$A = A_{\text{sect}\,\odot} - A_{\Delta}$$
$$= \left(\frac{49\pi}{6} - \frac{49\sqrt{3}}{4}\right)\text{cm}^2$$

El perímetro viene dado por:

$$P = 2r\,\text{sen}\,30° + \frac{2\pi r}{6}$$
$$= \left(\cancel{2} \bullet 7 \bullet \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\pi \bullet 7}{3}\right)\text{cm}$$
$$= \left(7 + \frac{7\pi}{3}\right)\ \text{cm}$$

31. o centro de la circunferencia.



Solución:
El ángulo del centro es:
$\alpha = 120°$.
El perímetro viene dado por:

$$P = 2r\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)° + \frac{2\pi r \bullet \cancel{120°}^{1}}{{}_{3}\cancel{360°}}$$

$$= 2 \bullet 10\,\text{sen}\,60° + \frac{2\pi \bullet 10}{3}$$

$$= \left(\cancel{20}^{10}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{20\pi}{3}\right)\text{ cm}$$

$$= \left(10\sqrt{3} + \frac{20\pi}{3}\right)\text{ cm}$$

El área del **sector circular:**
120° grados es la tercera parte del círculo, así que:

$$A_{120°} = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{100\pi}{3}\text{ cm}^2$$

Área del Δ OAB:
120° es suplementario con 60°, que ocupa la tercera posición de la tabla respectiva, esto es, le acompaña un $\sqrt{3}$ al factor constante $\frac{r^2}{4}$.
Es decir, el área en cm^2:

$$A_{\Delta OAB} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$$

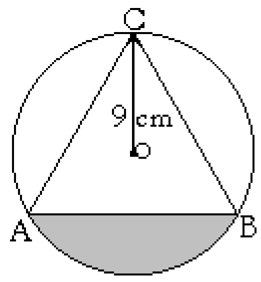
$$= \frac{100\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$$

$$= 25\sqrt{3}\ \text{ cm}^2$$

Y **el área del segmento circular** es la diferencia entre las áreas halladas:

$$A = \left(\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)\text{ cm}^2$$

32. El ΔABC es equilátero. o centro de la circunferencia.



Solución:
Los puntos A, B y C dividen la ⊙ en ángulos del centro de 360°/3 = 120°.
Luego, la expresión del perímetro y área son análogas al del ejercicio anterior, solo varía el radio. En lugar de r = 10 cm, tenemos r = 9 cm.

$$P = 2r\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)° + \frac{2\pi r \bullet \cancel{120°}^{1}}{{}_{3}\cancel{360°}}$$

$$= r\sqrt{3} + \frac{2\pi r}{3}\quad \text{(ejerc previo)}$$

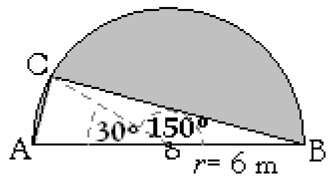
$$= \left(9\sqrt{3} + 6\pi\right)\text{cm}^2$$

Usando las expresiones del sector y triángulo AOB del ejercicio anterior —dado que tenemos el mismo ángulo α = 120° del centro— obtenemos inmediatamente la expresión del área del **segmento circular** es:

$$A = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \left(27\pi - \frac{81\sqrt{3}}{4}\right)\text{ cm}^2$$

33. $\overline{\text{AB}}$ diámetro de la semi circunferencia de centro o. Los ángulos del centro de la figura son 30° y 150°.



Solución:
Tenemos dos sectores circulares unidos que unidos forman media circunferencia:

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \bullet 36}{2}\text{ m}^2$$

$$= 18\pi\ \text{ m}^2$$

Y **las áreas de los ΔAOC y ΔBOC son iguales,** pues 30° y 150° son ∢s suplementarios.
30° ocupa la 1era posición de la tabla referida a áreas de **ΔsAOC**, esto implica que le acompaña un $\sqrt{1} = 1$ al factor constante $r^2/4$.
Es decir, (en cm^2):

$$A_{\Delta AOC} = \frac{r^2}{4} = \frac{6^2\sqrt{1}}{4}\ \text{m}^2$$

$$= 9\,\text{m}^2$$

La suma de áreas de ambos sectores es entonces:

$$A_{\Delta s} = 18\ \text{m}^2$$

El **área de los dos segmentos circulares** es la diferencia de áreas de los sectores circulares y los triángulos:

$$A = (18\pi - 18)\ \text{m}^2$$

$$= 18(\pi - 1)\ \text{m}^2$$

El perímetro de los dos segmentos es, en m:

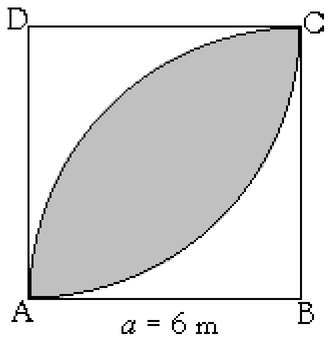
$$P = 2 \bullet 6\,\text{sen}(30°/2)$$

$$+ 2 \bullet 6\,\text{sen}(150°/2)$$

$$+ \frac{2\pi \bullet \cancel{6}}{\cancel{6}} + \frac{2\pi \bullet \cancel{6}^2}{\cancel{3}}$$

$$= 12\,(\text{sen}15° + \text{sen}75°)\ +\ 6\pi$$

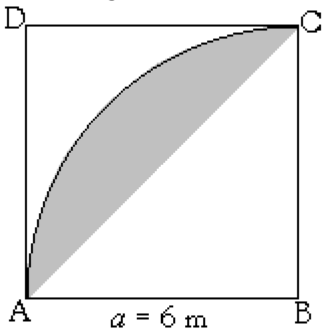
34. ABCD cuadrado de lado $a = 6\ m$.



Solución:

La zona sombreada son dos segmentos circulares unidos en el eje de simetría AC del cuadrado ABCD.

Hallemos primero la medida de un segmento circular.



El área del sector circular de la figura de arriba es:

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{36\pi}{4}\ m^2 = 9\pi\ m^2$$

El área del Δ(rect) que debemos restar, tiene el factor $\sqrt{4} = 2$ junto al factor $r^2/4$.

$$A_\Delta = \frac{r^2}{4} \bullet 2 = \frac{36}{4} \bullet 2\, m^2$$
$$= 18\, m^2$$

La diferencia de tales áreas es:

$$(9\pi - 18)\ m^2$$

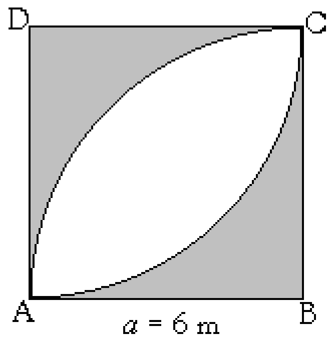
Y el área pedida de los dos segmentos es el doble:

$$A = (18\pi - 36)\ m^2$$
$$= 18(\pi - 2)\ m^2$$

El perímetro son dos cuartos de circunferencia que unidos convenientemente, forman una media circunferencia.

$$P = \cancel{2}\,\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{4}} = \pi r = 6\pi\ cm$$

35. ABCD cuadrado de lado $a = 6\ m$.



Solución:

El área de un cuadrado de lado a es $A_\square = a^2$.

En nuestro caso, $a = 6\ m$.

Así:

$$A_\square = (6\,m)^2 = 36\,m^2$$

Al cual debemos restar el área obtenido precisamente en el ejercicio anterior.

El área final es:

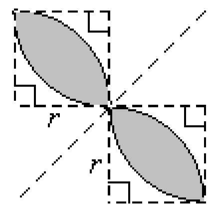
$$A = 36 - (18\pi - 36)\ m^2$$
$$= (72 - 18\pi)\ m^2$$

Estará de más decir, pero es claro que para resolver este ejercicio, es necesario plantearse y resolver el anterior.

El perímetro de la región sombreada son los dos cuartos (invertidos) de ⊙ que forman entre sí media ⊙ más los 4 lados del cuadrado.

$$P = 4a + \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}}$$
$$= (24 + 6\pi)\ m$$

36. Flor de dos pétalos congruentes. El fondo son dos cuadrantes de radio $r = 8\ cm$.



Solución:

Cada cuadrante tiene 2 segmentos circulares con ángulos del centro $\alpha = 90^\circ$.

Y la figura sombreada tiene en total 4 segmentos circulares.

Hallemos el área de uno de ellos primero:

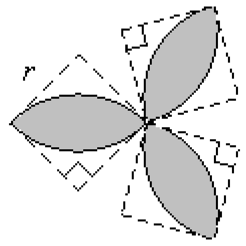
$$A_{1\,segm} = A_{1\,sect\odot} - A_{\Delta 90^\circ}$$
$$= \left[\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2\sqrt{4}}{4}\right] cm^2$$
$$= \left[\frac{\pi \bullet 8^2}{4} - \frac{8^2}{2}\right] cm^2$$
$$= (16\pi - 32)\ cm^2$$
$$= 16(\pi - 2)\ cm^2$$

$$A_{4\,segm} = 64(\pi - 2)\ cm^2$$

El perímetro son cuatro cuartos de circunferencias que unidos convenientemente, forman una circunferencia.

$$P = \cancel{4}\,\frac{2\pi r}{\cancel{4}}$$
$$= 2\pi r$$
$$= 16\pi\ cm$$

37. Flor de tres pétalos congruentes.
$r = 10\ cm.$



Solución:
Área:
Cada pétalo contiene dos segmentos circulares.
El área de un segmento es:

$$A_{1\,\text{segm}} = A_{1\,\text{sect}\,\odot} - A_{\Delta_{90^\circ}} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = (25\pi - 50)\ \text{cm}^2 = 25(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

Y como un pétalo tiene dos segmentos circulares, tenemos:

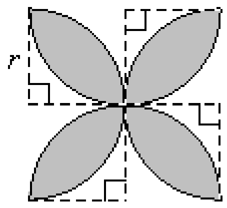
$$\Rightarrow A_{1\,\text{pétalo}} = 50(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{3\,\text{pétalos}} = 150(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

El perímetro:
La figura tiene 6 cuartos (invertidos) de ⊙s, lo que forman **3** medias ⊙s.

$$P_{3\,\text{pétalos}} = 6 \bullet \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{4}_2} = 3 \bullet \pi r = 30\pi\ \text{cm}$$

38. Flor de cuatro pétalos congruentes.
$r = 3\ cm.$



Solución:
Área:
La figura contiene 8 segmentos circulares.
El área de un segmento es:

$$A_{1\,\text{segm}} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = 9\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\text{cm}^2$$

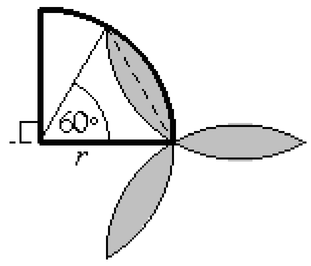
$$\Rightarrow A_{1\,\text{pét}} = 18\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{4\,\text{pét}} = 18(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

El perímetro:
La figura tiene 8 cuartos (invertidos) de ⊙s, lo que forman 2 ⊙s.

$$P_{4\,\text{pétalos}} = 2 \bullet 2\pi r = 4\pi r\ \text{cm} = 12\pi\ \text{cm}$$

39. Flor de tres pétalos congruentes.
$r = 10\ cm.$



Solución:
Área:
Remitiéndonos al cuadrante de la figura.

$$A_{1\,\text{segm}\,\odot} = A_{1\,\text{sect}\,\odot} - A_{\Delta_{60^\circ}} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

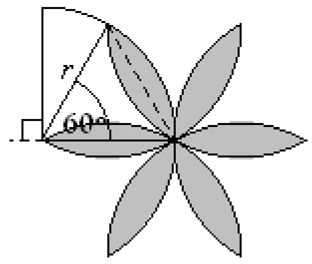
$$\overset{/\bullet 2}{\Rightarrow} A_{1\text{pét}} = 2\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\overset{/\bullet 3}{\Rightarrow} A_{3\text{pét}} = 6\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = r^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 100\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2$$

El perímetro está compuesto por la parte curvilínea de seis sextas partes de ⊙s. Sextas partes porque cada segmentos está formado con un ángulo del centro α= 60°. Juntos forman una 1 circunferencia.
Así que:

$$P = \cancel{6} \bullet \frac{2\pi r}{\cancel{6}} = 2\pi r = 20\pi\ \text{cm}$$

40. Flor de seis pétalos congruentes.
$r = 7\ cm$.



Solución:
Del ejercicio anterior:

$$A_{3\ \text{pétalos}} = r^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Entonces, para 6 pétalos:

$$A_{6\ \text{pétalos}} = 2r^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 98\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{cm}^2$$

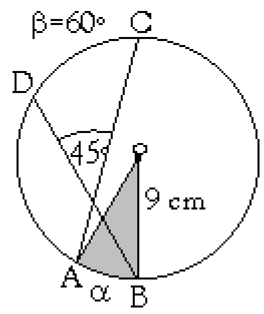
Tenemos 12 sextas partes de ⊙s. Pues cada arco mide α = 60° = (1/6) de 360°.
Así, el perímetro es:

$$P = {}^{2}\cancel{12}\bullet\frac{2\pi r}{\cancel{6}} = 4\pi r;\quad r = 7\ \text{cm}$$

$$= 28\pi\ \text{cm}$$

Nota: Debido al ejercicio anterior, se podía inducir directamente la expresión P = $4\pi r$ para el perímetro de la flor con 6 pétalos congruentes.
El resultado hallado lo confirma.

41. El ángulo de 45º **es interior a la circunferencia** de centro o.
$\alpha = \overset{\frown}{AB} = ?;\quad \beta = \overset{\frown}{CD} = 60°$
y $r = 9\ cm$.



Solución:
45° es ∢ interior a una ⊙, tenemos entonces que:

$$45° = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Reemplazando β = 60°:

$$45° = \frac{\alpha + 60°}{2}\quad / \bullet 2\ / -60°$$

$$90° - 60° = \alpha$$

$$30° = \alpha$$

⇒ La región sombreada subtiende un arco de 30°. Lo que es la doceava parte del círculo, de radio: r = 9 cm.

$$\Rightarrow A = \frac{\pi r^2}{12} = \frac{\pi \bullet 9 \bullet \cancel{9}^{3}}{{}_{4}\cancel{12}}\ \text{cm}^2$$

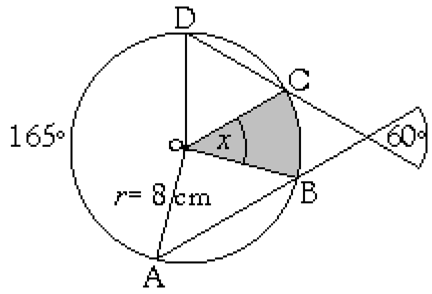
$$= \frac{27\pi}{4}\ \text{cm}^2$$

El perímetro de la doceava parte de la ⊙ es:

$$P = \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{12}_{6}} = \frac{\pi \bullet \cancel{9}^{3}}{2\cancel{6}}\ \text{cm}$$

$$= \frac{3\pi}{2}\ \text{cm}$$

42. El ángulo de 60º es opuesto por el vértice **al ángulo exterior** a la circunferencia de centro o.
Con $\overset{\frown}{DA} = 165°;\ x = \overset{\frown}{BC} = ?$
y $r = 8\ cm$.



Solución:
60° es ángulo opuesto por el vértice al ángulo exterior a la circunferencia. Por lo tanto, tienen igual medida.
Y por definición de ángulo exterior a una circunferencia:

$$60° = \frac{165° - x}{2}$$

Despejando, para x= 45°.
El ángulo del centro x subtiende 45°. Por lo tanto, el área de la región sombreada es:

$$A = \frac{x \bullet \pi r^2}{360°} = \frac{\pi \bullet 8^2}{8}\ \text{cm}^2$$

$$= 8\pi\ \text{cm}^2$$

Y el perímetro de la octava parte de la circunferencia es:

$$P = \frac{2\pi r}{8} = \frac{2\pi \bullet \cancel{8}}{\cancel{8}}\ \text{cm}$$

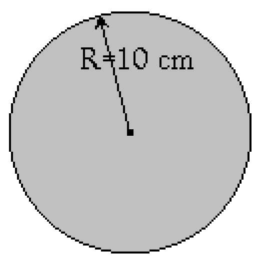
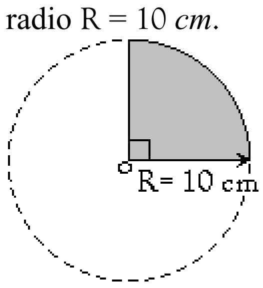
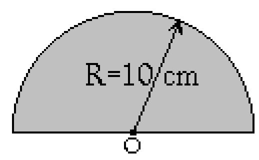
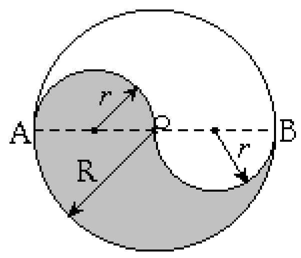
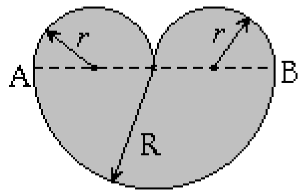
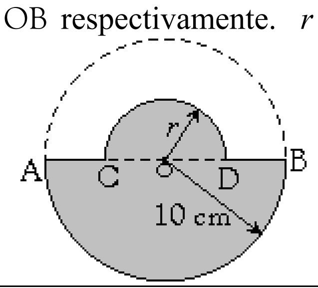
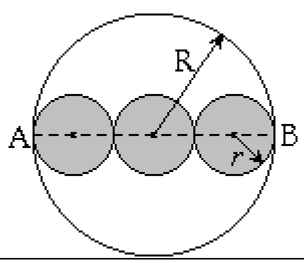
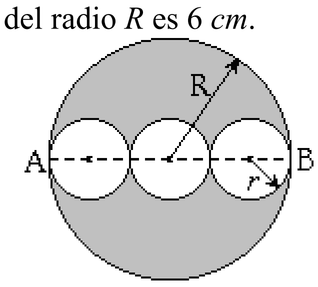
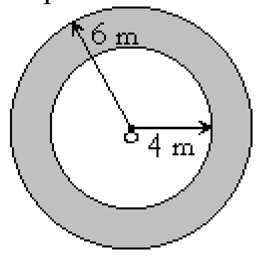
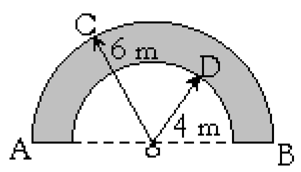
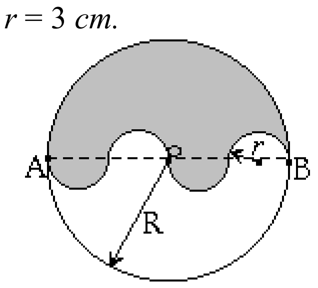
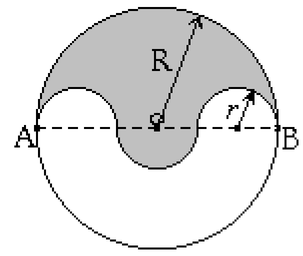
$$= 2\pi\ \text{cm}$$

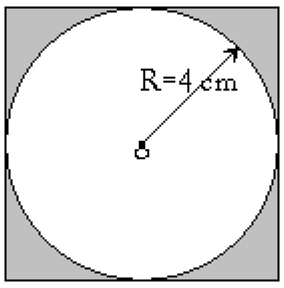
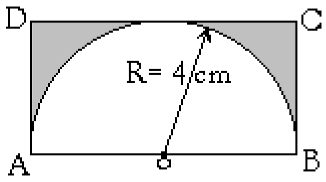
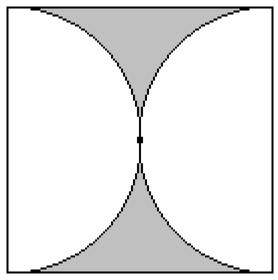
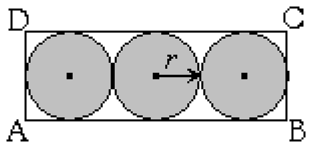
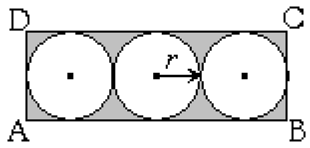
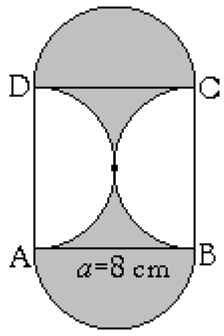
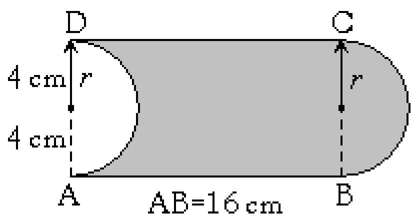
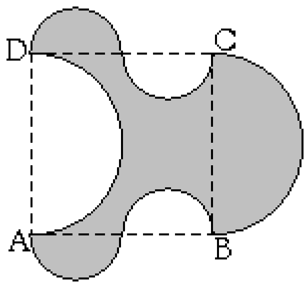
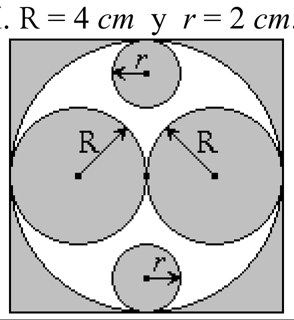
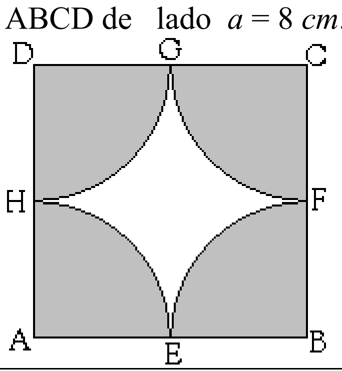
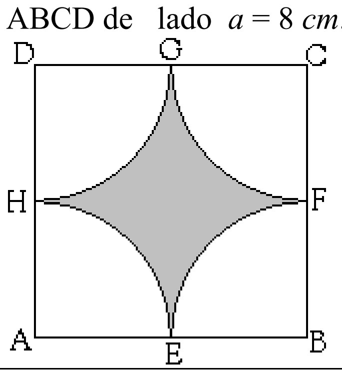
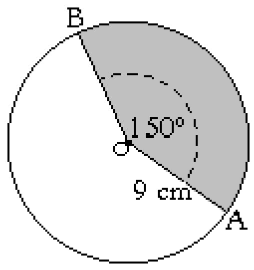
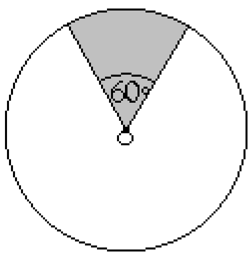
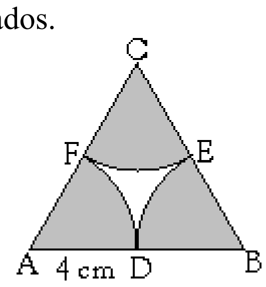
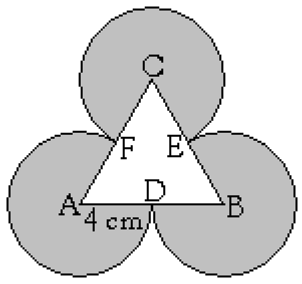
Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

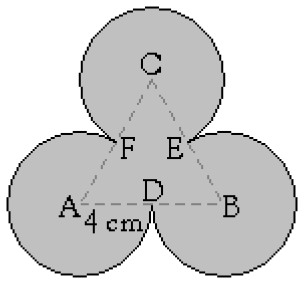
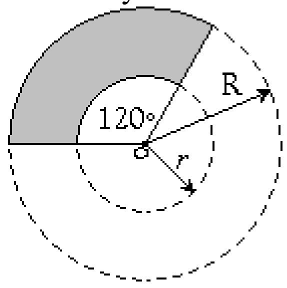
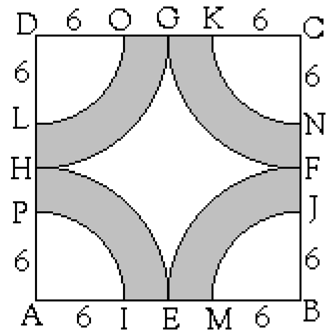
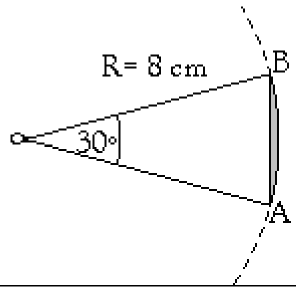
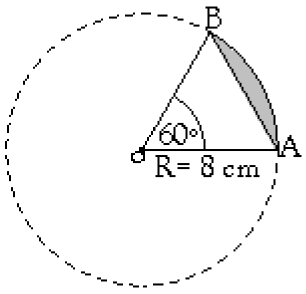
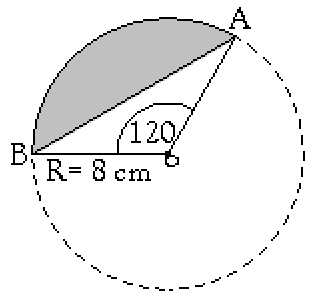
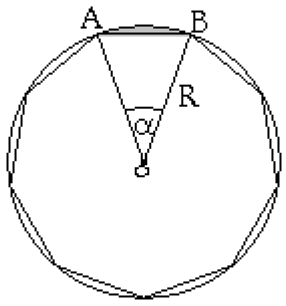
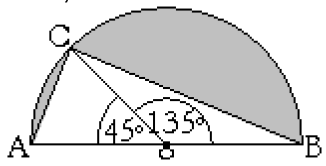
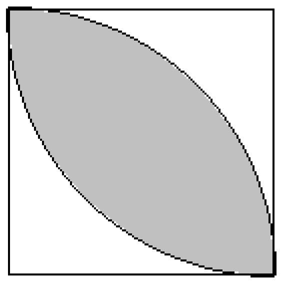
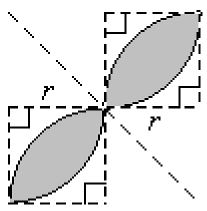
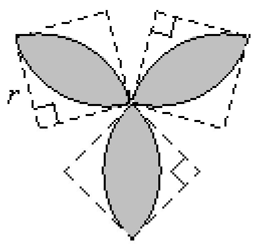
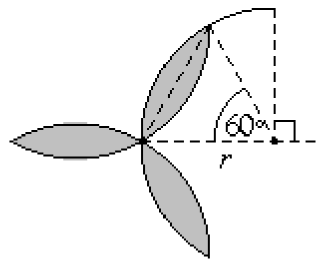
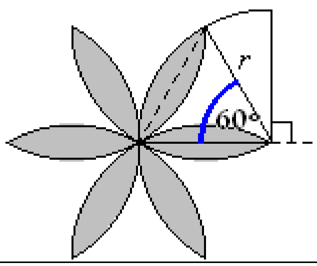
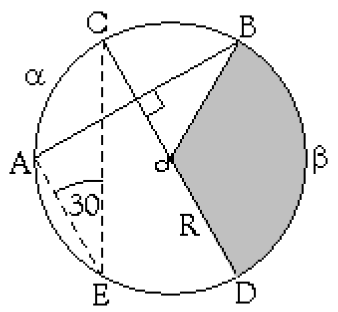
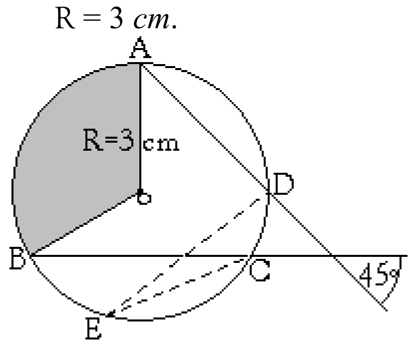
Círculos y Circunferencias: Áreas y Perímetros
Listado Nº 5 de Ejercicios (Propuestos)

Nombre: ___________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Halle el área y perímetro de las siguientes figuras sombreadas:

1. 	**2.** o centro de la circunferencia de radio R = 10 *cm*. 	**3.** 
4. $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o. R = 10 *cm*. r = ? 	**5.** $\overline{AB}$ diámetro de la semi⊙ mayor. R =10 *cm*. r = ? 	**6.** $\overline{AB}$ diámetro de la semi⊙ de radio 10 *cm*. C y D puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ respectivamente. r = ? 
7. Las circunferencias interiores tienen radio r y son tangentes con la de al lado. La medida del radio R es 6 *cm*. 	**8.** Las circunferencias interiores tienen radio r y son tangentes con la de al lado. La medida del radio R es 6 *cm*. 	**9.** Los radios de las circunferencias mayor y menor son 6 *m* y 4 *m*. respectivamente. 
10. $\overline{AB}$ diámetro de la semi⊙ mayor de centro o. OC = 6 *m* y OD = 4 *m*. 	**11.** $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o. r = 3 *cm*. 	**12.** $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o. r = 2 *cm*. 

13. La circunferencia de centro o y radio R está inscrita en el cuadrado. 	**14.** ABCD rectángulo y $\overline{AB}$ diámetro de la semicircunferencia. 	**15.** Las semi⊙s son tangentes en el centro del cuadrado de lado a = 8 *cm*. 
16. ABCD es rectángulo. La base $\overline{AB}$ mide 6 *cm*. 	**17.** ABCD es rectángulo. La base $\overline{AB}$ mide 6 *cm*. 	**18.** ABCD es un cuadrado de lado a = 8 *cm*. 
19. ABCD rectángulo. Los arcos son 2 semicircunferencias de radio r = 4 *cm*. 	**20.** ABCD es un cuadrado de lado a = 10 *cm*. Los arcos son semicircunferencias. 	**21.** Todas las circunferencias son tangentes al cuadrado. Las centrales son tangentes entre sí. R = 4 *cm* y r = 2 *cm*. 
22. E, F, G y H puntos medios de los lados del cuadrado ABCD de lado a = 8 *cm*. 	**23.** E, F, G y H puntos medios de los lados del cuadrado ABCD de lado a = 8 *cm*. 	**24.** o centro de la circunferencia. 
25. o centro de la circunferencia. 	**26.** El ΔABC es equilátero. D, E y F puntos medios de los lados. 	**27.** El ΔABC es equilátero. D, E y F puntos medios de sus lados. 

28. El ΔABC es equilátero. D, E y F puntos medios de sus lados. 	**29.** o centro de la circunferencia. *R* = 8 *cm* y *r* = 4 *cm*. 	**30.** E, F, G, H puntos medios de los lados de 16 *cm* del cuadrado ABCD. 
31. o centro del círculo que contiene a la región sombreada. 	**32.** o centro de la circunferencia. R = 8 *cm*. 	**33.** o centro de la circunferencia. R = 8 *cm*. 
34. o centro del círculo que contiene la región sombreada. R = 9 *cm*. 	**35.** $\overline{AB}$ diámetro de la semi circunferencia de centro o. Los ángulos del centro son 45° y 135°. R = 8 *cm*. 	**36.** Los arcos tienen su origen en los vértices del cuadrado de lado *a* = 4 *cm*. 
37. Flor de dos pétalos congruentes. *r* = 4 *cm*. 	**38.** Flor de tres pétalos congruentes. *r* = 4 *cm*. 	**39.** Flor de tres pétalos congruentes. *r* = 4 *cm*. 
40. Flor de seis pétalos congruentes. *r* = 4 *cm*. 	**41.** O centro. $\alpha = \widehat{CA}$; $\beta = \widehat{DB}$ $\sphericalangle AEC = 30°$; CD = 12 cm. 	**42.** $\alpha = \widehat{AB}$; $\sphericalangle CED = 15°$; R = 3 *cm*. 

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

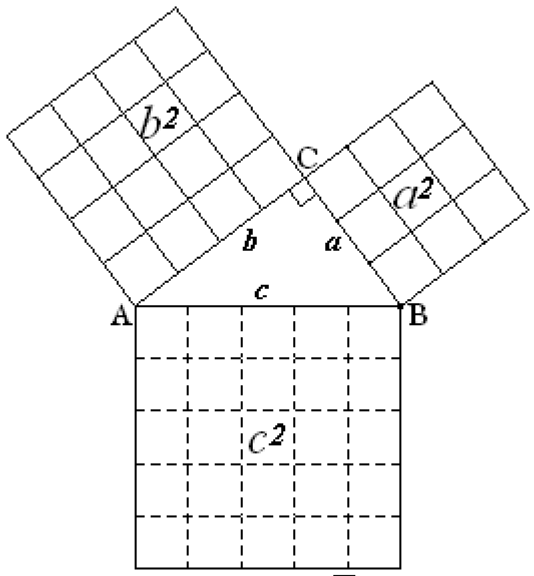
8. INTRODUCCIÓN A EJERCICIOS COMBINADOS CON TRIÁNGULOS

El TEOREMA (particular) de PITÁGORAS

No es extraño hallar este teorema en distintos aspectos de la geometría Euclidiana, sino por el contrario, muy común.
Su enunciado más usual se refiere a las medidas de los lados del triángulo, que dice:

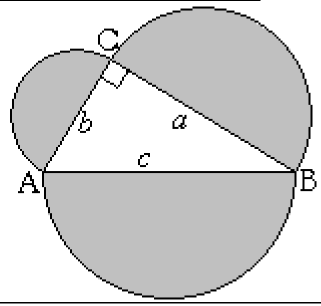
8.1. *Teorema particular de Pitágoras*

“En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.**”**



La figura más recurrente que ilustra el enunciado es el de la elaboración de cuadrados teniendo a los catetos y a la hipotenusa como medida de los lados.
Sin embargo, también se puede ilustrar con áreas de semicírculos –o círculos – que contengan a los catetos y la hipotenusa como sus diámetros.

$$\frac{\pi(a/2)^2}{2}+\frac{\pi(b/2)^2}{2}=\frac{\pi(c/2)^2}{2}$$



8.2. *Números Pitágóricos*

Los tríos de números que satisfacen el teorema particular de Pitágoras son denominados números o tríos pitagóricos.
Ejemplos de ellos son los de la tabla de la derecha:

Cada uno de estos tríos de números satisface la igualdad:

$$a^2+b^2=c^2$$

(c es el mayor lado del triángulo, llamado hipotenusa. a y b llamados catetos)

Los números que son primos entre sí, como:

3, 4 y 5;
5, 12 y 13;
8, 15 y 17

Δ ABC rectángulo en C		
a	***b***	***c***
3	4	5
6	8	15
9	12	15
12	16	20
15...	20...	25...
3*n*	**4*n***	**5*n***
5	12	13
10	24	26
15	36	39
20	48	52
25...	60...	65...
5*n*	**12*n***	**13*n***
8	15	17
16	30	34
24	45	51
32	60	68
40...	75...	85...
8*n*	**15*n***	**17*n***

Son llamados *tríos primitivos* -aunque personalmente los llamo *tríos pitagóricos fundamentales*, espero que nadie se ofenda. Esto porque al amplificarlos por cualquier entero, se obtiene otro trío de números que satisface a su vez el teo. de Pitágoras.
La dificultad se presenta cuando el ejercicio incluye reducir una cantidad subradical, procedimiento que no se incluye en el nivel de escolaridad donde usualmente se enseña áreas y perímetros de círculos y circunferencias, respectivamente.

8.3. **EL ÁREA DE TODO TRIÁNGULO RECTÁNGULO**, puede calcularse si se conoce la medida de sus catetos -lados menores.

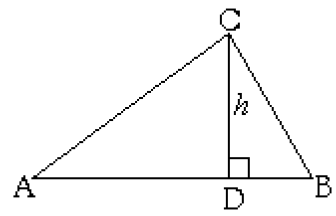
$$A_{\Delta Rect} = \frac{ab}{2}.$$

Y es la expresión que se debe recordar cuando se combinan triángulos rectángulos con ejercicios de cálculo de áreas en donde intervienen figuras curvilíneas.

Por ejemplo: si tenemos un triángulo rectángulo de lados 5 *m*, 12 *m* y 13 *m*. Para hallar su área inmediatamente debemos reconocer como sus catetos las medidas de sus dos lados menores. En este ejemplo, 5 m y 12 m. Y no tiene relevancia cual corresponde al cateto *a* o al cateto *b*.
Y su área sería:

$$A_{\Delta Rect} = \frac{ab}{2} = \frac{5 \bullet \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}}\ m^2 = 30\ m^2$$

8.4. **EL ÁREA UN TRIÁNGULO CUALQUIERA** independientemente de si es rectángulo o no, puede calcularse si se conoce una de sus alturas y el lado sobre el cual esta se traza perpendicularmente.
Pues el área de todo triángulo viene dado por el semi-producto de las medidas de la altura y el lado sobre el cual se traza.



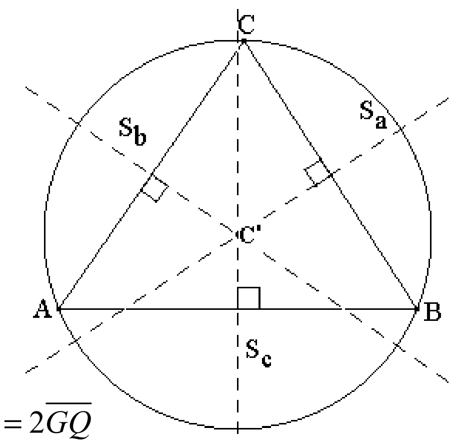
En el caso de la figura de la derecha, el área es:
En el caso de la derecha, si $h = 7\ m$; AB = 12 *m*.

Entonces, $A_{\Delta ABC} = \frac{h \bullet AB}{2} = \frac{7 \bullet \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}} m^2 = 42\ m^2$

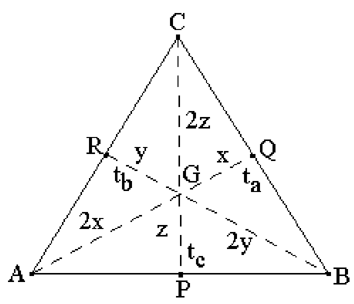
Hay que decir que ejercicios de circunferencias combinados con triángulos en cálculos de áreas y perímetros son más propios de preparación para la prueba de selección universitaria (P.S.U.) que de medición de estos contenidos en el establecimiento de nivel primario o básico. Esto, porque el grado de madurez de la población escolar puede no ser la más favorable para observarlos con el grado de dificultad que se merece tal combinación de elementos geométricos, sobre todo con el teorema particular de Pitágoras, que suele requerir constante atención para captar su aplicación.

8.5. PUNTOS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO
Los puntos de intersección de elementos similares en un triángulo son denominados puntos notables del triángulo.
El Incentro I -intersección de las bisectrices-, equidista de los lados del triángulo (posee la misma distancia a ellos). Definiendo así el centro de una ⊗ inscrita en el Δ.

Las mediatrices –o simetrales (s)- concurren en un punto llamado circuncentro (C’), el cuál equidista de los vértices del Δ. -Es centro de la circunferencia circunscrita al Δ-.

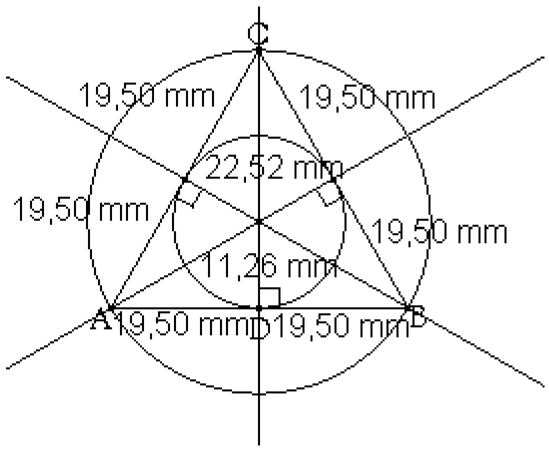


Las transversales de gravedad unen el vértice con el punto medio del lado opuesto, pero también concurren en un punto, llamado centro de gravedad (G), también Centroide o Baricentro (B). A partir de este punto, las transversales de gravedad se dividen en la razón 2:1, partiendo desde el vértice al lado opuesto.



$$\overline{AG} = 2\overline{GQ}$$
$$\overline{BG} = 2\overline{GR}$$
$$\overline{CG} = 2\overline{GP}$$

En todo triángulo equilátero, los tres puntos notables (I, C, G) coinciden. Siendo el punto de coincidencia, **el centro de la circunferencia inscrita y circunscrita.** Es decir, **coinciden con el ortocentro (O).** Así pues, la coincidencia de los puntos notables en un Δ equilátero permite inscribir y circunscribir ⊙s concéntricas -con el mismo centro.

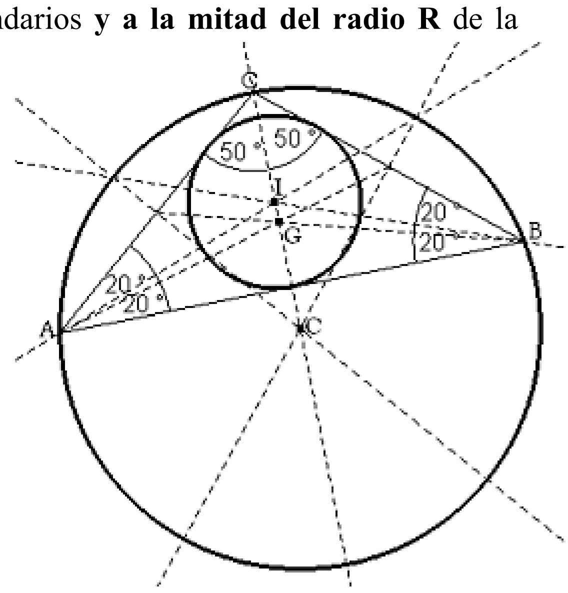


La figura de la izquierda ilustra el punto de coincidencia entre las bisectrices, mediatrices o simetrales –y por lo tanto de las alturas– con las transversales de gravedad. Respecto a la presencia de estos últimos, note que la distancia del vértice C al centro (Ortocentro), está en la razón 2 : 1 con la distancia del centro O al punto D.

De lo que se desprende que **en un Δ equilátero el radio R de la ⊙ circunscrita (mayor) es dos tercios, de cualquiera de los elementos secundarios del triángulo.**

No resulta menor indicar que el radio ***r*** de la **circunferencia inscrita** (menor) equivale a **un tercio** de cualquiera de los elementos secundarios **y a la mitad del radio R** de la circunferencia circunscrita.

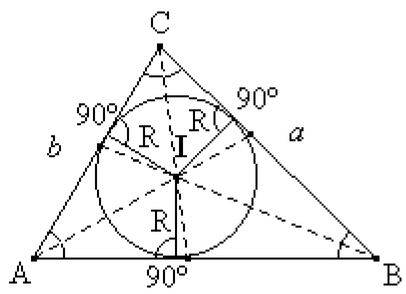
En un triángulo isósceles, solo la recta trazada desde *del ángulo **no basal*** –vértice C de la figura, contiene la bisectriz, transversal de gravedad y simetral o mediatriz. Además, los tres puntos notables **(I, C, G) no** coinciden en un solo punto del espacio.



Otros teoremas de áreas en donde intervienen circunferencias son:

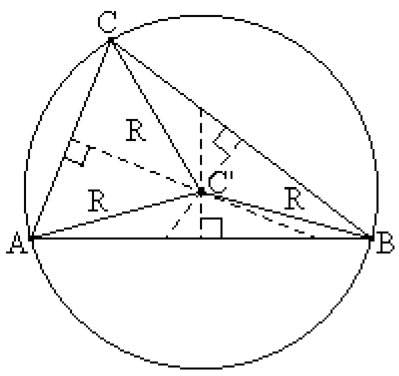
Teorema: El área de un triángulo circunscrito es igual al producto de su semi-perímetro por el radio de la circunferencia inscrita en el.

$$A = \frac{P}{2}R = \frac{(a+b+c)}{2}R$$



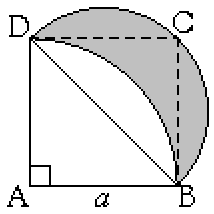
Teorema: El área de un triángulo inscrito es igual al producto de sus lados dividido por el cuádruple del radio de la circunferencia circunscrita.

$$A = \frac{abc}{4R}$$



Adjuntados en el presente trabajo de manera anecdótica más que otra cosa. Su mención y presencia es casi nula en la literatura matemática para la enseñanza media.

8.6. LÚNULA



En la figura de la izquierda, ABCD es un cuadrado de lado a y la región sombreada se conoce como **Lúnula**.
Cuando me hallé con esta figura por primera vez y notando,… bueno,… que ella tiene nombre, no pude evitar pensar que ella nos reclama y merece una deferente atención, ¿no les parece? Pues bien, aquí vamos entonces:

El **área de la lúnula** viene dada por la diferencia de áreas entre el semicírculo de diámetro $\overline{BD}$ y el segmento circular del cuadrante de círculo de radio a. Esto es:

$$A = \frac{\pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2}{2} - \text{área del segmento circular formado por el } \widehat{BD} \text{ y la cuerda } \overline{BD}$$

$$= \frac{\pi}{2}\bullet\frac{(BD)^2}{4} - [\text{área del cuarto de} \otimes \text{de radio } a \ - \ \text{área del } \Delta ABC]$$

$$= \frac{\pi}{\cancel{2}}\bullet\frac{\cancel{2}a^2}{4} - \left[\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

¡El área del ΔABD isósceles, rectángulo en A!
Y resulta justificado el interés cuando descubrimos que, pese a tener la figura un contorno curvilíneo, **¡su área no depende del número irracional π!**, sino de expresiones propias de una figura de contorno rectilíneo. En el próximo punto, volveremos a retomar este tema y sabremos porque la lúnula es una figura cuadrable. Y la exposición hecha de su área, su cuadratura.

El **perímetro de la lúnula** está formado por:
La semicircunferencia de diámetro $\overline{BD}$ más un cuarto de circunferencia de radio a.
Para hallar el diámetro AB aplicamos Pitágoras en el Δrect en A**:**
$(BD)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$ y el radio de tal semicircunferencia es la mitad del diámetro $\overline{BD}$ esto es**:** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Así, el perímetro P de la lúnula es:

$$P = \frac{2\pi\bullet BD}{2} + \frac{2\pi\bullet AB}{4}$$

$$= \pi(BD) + \frac{\pi\bullet AB}{2}$$

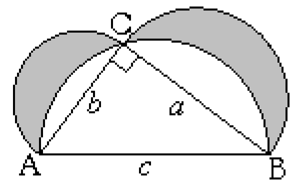
$$= \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi a}{2}$$

$$= \frac{a\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{a\pi}{2}$$

$$= \frac{a\pi}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

8.7. UNA RELACIÓN MUY INTERESANTE: LA CUADRATURA

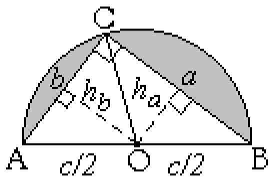
Un problema que suscitó en mi mayor interés personal me llevó a su vez a procurar demostrar lo que tal problema y solo la presentación de la respuesta dejaban entrever. Un tema de la literatura matemática, presente *en la siguiente figura*, del que había leído por afición en mi época de estudiante.



Sea ABC un triángulo rectángulo en C.
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ diámetros de los semicírculos que ilustra la figura de la derecha. Entonces, las sumas de las áreas sombreadas es igual al área del triángulo rectángulo ABC rectángulo en C.

Demostración:
Los radios de los semicírculos con diámetros $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$ son respectivamente $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ y $\frac{c}{2}$.

A las áreas de los semicírculos formados con los radios $\frac{a}{2}$ y $\frac{b}{2}$ hay que rectar el área de los segmentos circulares formados por los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$.



El área de ambos segmentos circulares se obtiene de la diferencia de áreas entre el semicírculo mayor y el ΔABC rectángulo en C.

El área del semicírculo con diámetro la hipotenusa c viene dada por:

$$A_{\text{semicírculo } c} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\bullet\frac{c^2}{4} = \frac{\pi c^2}{8}$$

Y recordando que el área de todo triángulo rectángulo (Δrect) es el semiproducto de los catetos. Así, tenemos que: $A_{\Delta\text{rect ABC}} = \frac{ab}{2}$

Así, el área de los segmentos circulares formados por los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ con los respectivos catetos del triángulo es:

$$A_{\text{segm circulares}} = A_{\text{semicírculo } c} - A_{\Delta\text{rect ABC}}$$
$$= \frac{\pi c^2}{8} - \frac{ab}{2}$$

Finalmente, el área de la Lúnula, la región sombreada, viene dada por:

A = Suma de las áreas de semi ⊙ con diámetros en a y en b *menos* área segmentos circulares

$$= \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{\pi c^2}{8} - \frac{ab}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\overbrace{a^2+b^2}^{c^2}}{4}\right) - \frac{\pi c^2}{8}}_{0} + \frac{ab}{2}$$

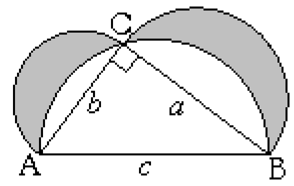
$$= \frac{ab}{2}$$

¡¡El área del ΔABC rectángulo en C!!

Lo verdaderamente interesante, es descubrir que, pese a tener la figura una curvatura, nuevamente nos encontramos que *¡su área no depende de* π ! (ni de ningún otro número irracional). Cuando esto sucede, se dice que *la figura es cuadrable*. Además, *a la presentación del área* de *una figura curvilínea solo en expresiones racionales*, propias de contornos rectilíneos, se denomina **cuadratura de la figura**.

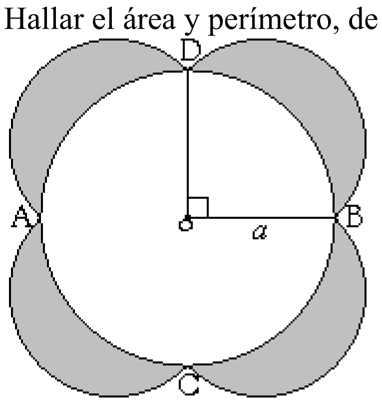
Tanto la última figura vista, como la lúnula en un solo cuadrante, son cuadrables. Ambas coinciden en contener un triángulo rectángulo en su interior y una diferencia de áreas de semicircunferencias y segmentos circulares en torno a los catetos. Esta coincidencia nos puede ayudar a reconocerlos y la expresión de sus áreas, increíblemente sencilla, solo en función de los catetos del Δ rectángulo.

En cambio, para el perímetro de la lúnula, vemos que está compuesta por la suma de perímetros de tres semicircunferencias de radios *a*/2, *b*/2 y *c*/2 finalmente.



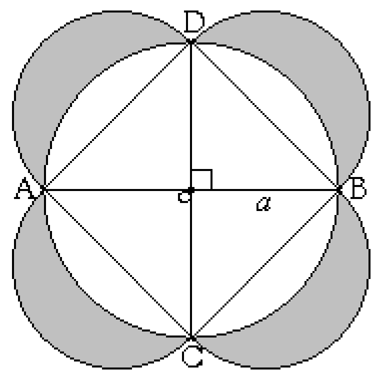
$$P = \frac{\cancel{2}\pi\left(\frac{a}{\cancel{2}}\right)}{2} + \frac{\cancel{2}\pi\left(\frac{b}{\cancel{2}}\right)}{2} + \frac{\cancel{2}\pi\left(\frac{c}{\cancel{2}}\right)}{2} = \frac{\pi}{2}(a+b+c)$$

EJEMPLOS:
Hallar el área y perímetro, de la siguiente figura sombreada:



Solución:
La figura sombreada está formada por 4 lúnulas de área $\frac{a^2}{2}$ cada una.
Por lo tanto su área es

$$A = 4 \bullet \frac{a^2}{2} = 2a^2$$



El perímetro viene dado por una ⊙ de radio a y cuatro semi⊙s de diámetros congruentes a $BD = a\sqrt{2}$ (por Pitágoras en ΔOBD) ⇒ sus radios miden $a\sqrt{2}/2$.

$$P = 2\pi a + {}^{2}\cancel{4} \bullet \frac{\cancel{2}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)}{\cancel{2}} = 2\pi a + 2\pi a\sqrt{2} = 2\pi a\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Y que duda cabe, si no es más que el perímetro de 4 lúnulas, cada una de ellas de perímetro: $\frac{a\pi}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$ hallada anteriormente.

Viéndolo así, el perímetro de este ejercicio se puede resolver también como 4 cuatro lúnulas:

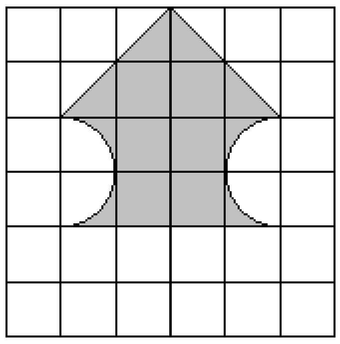
$$P = 4 \bullet \frac{a\pi}{2}\left(\sqrt{2}+1\right) = 2\pi a\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Listado N° 6 de Ejercicios (Resueltos)
Círculos y Circunferencias combinadas con Triángulos

Hallar el área de las regiones sombreadas y el perímetro que las encierra:

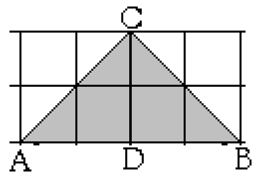
1. Cada cuadrado corresponde a 1 cm^2.



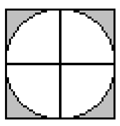
Solución:
La superficie de la figura sombreada se puede redistribuir en:

- Un triángulo, cuya área esta dada por:

$$A = \frac{h \bullet AB}{2} = \frac{\cancel{2} \bullet 4}{\cancel{2}} = 4\ \text{cm}^2$$



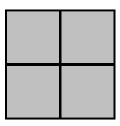
- La diferencia entre un cuadrado y un círculo de radio R= 1 cm.



Su área es:

$$A = 4 - \pi R^2 = 4 - \pi \bullet 1 = 4 - \pi \quad \text{cm}^2.$$

- Y también contiene un cuadrado central de 4 cm^2.



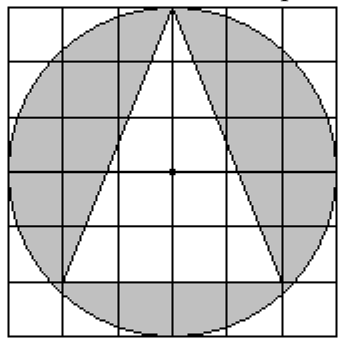
La suma de todas estas áreas es de 9 cm^2.

El perímetro viene dado por:

- las dos diagonales superiores que por Pitágoras cada una mide $\sqrt{8} = \sqrt{4 \bullet 2} = 2\sqrt{2}$ y suman entre sí $4\sqrt{2}$ cm.
- Más las dos semicircunferencias que suman forman el perímetro de una sola de 2π cm.
- y la base rectilínia de 4 cm.

El perímetro total es $\left(4\sqrt{2} + 2\pi + 4\right)$ cm.

2. Cada cuadrado corresponde a 1 cm^2.



Solución:
El radio de la circunferencia es 3 cm.
Luego el área de toda la superficie que encierra es:

$$A_{\odot} = \pi R^2 = \pi \bullet 3^2\ \text{cm}^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$$

Pero debemos restar el área que encierra el triángulo. Su altura del vértice superior a la base es h = 5 cm. y la base tiene una medida de 4 cm.
Así que el área del triángulo es:

$$A_{\Delta} = \frac{h \bullet \text{base}}{2} = \frac{5 \bullet \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\ \text{cm}^2 = 10\ \text{cm}^2$$

Y la diferencia entre el área del ⊙ y del Δ, que es el área pedida, es:

A = (9π – 10) cm^2.

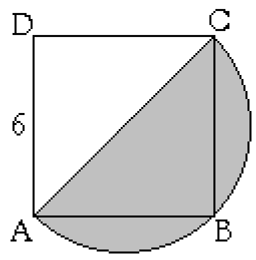
El perímetro resulta de la suma del perímetro del ⊙ y del Δ.

$$P = 2\pi R + \left(\text{base } \Delta + \text{sus 2 lados laterales}\right)$$
$$= 2\pi \bullet 3\ \text{cm} + \left(4\ \text{cm} + 2\sqrt{5^2 + 2^2}\ \text{cm}\right)$$

Donde hemos aplicado teo. de Pitágoras para hallar la medida de los lados laterales.

$$P = \left(6\pi + 4 + 2\sqrt{29}\right)\ \text{cm}$$

3. ABCD cuadrado de lado $a = 6\ cm$.



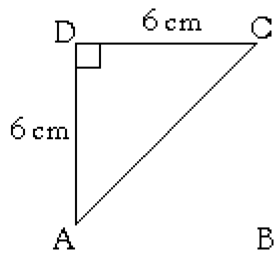
Solución:

La figura sombreada es una semicircunferencia, cuyo radio tiene como medida la mitad del diámetro AC. Medida que desconocemos, pero que podemos encontrar utilizando Pitágoras en el Δ rect ACD.

Y sabiendo que:

CD = AD = 6 cm.

Son los catetos y AC = c es el lado mayor y siempre opuesto al ángulo de 90º.



$$(\text{AC})^2 = (\text{AD})^2 + (\text{CD})^2$$
$$= 6^2 + 6^2$$
$$= 36 + 36$$
$$= 72$$
$$\Rightarrow \text{AC} = \sqrt{72}$$
$$\Rightarrow \text{radio} \odot = \frac{\text{AC}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2}$$

Luego **el área** pedida es la que encierra la semi ⊙:

$$\text{A} = \frac{\pi}{2}R^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{72}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\bullet\frac{72}{4} = \frac{\cancel{72}^{9}}{\cancel{8}}\pi\ \text{cm}^2$$
$$= 9\pi\ \text{cm}^2$$

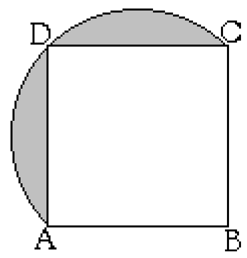
El perímetro es la semi⊙ de radio $R = \frac{\sqrt{72}}{2}$ cm

es: $\text{P} = \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} = \sqrt{72}\ \pi$ cm.

Cuyo resultado más usual queda tras reducir la cantidad subradical:

$$\text{P} = \sqrt{36 \bullet 2} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

4. ABCD cuadrado. AB = 9 cm.



Solución:

Lo más fácil es vislumbrar que la figura sombreada se puede obtener de la diferencia de áreas entre un semicírculo de diámetro AC y un ΔABC, rectángulo en D.

El diámetro AC se puede obtener aplicando teo. de Pitágoras en el ΔACD, rectángulo en D.

$$(\text{AC})^2 = (\text{AD})^2 + (\text{CD})^2$$
$$= 81 + 81 = 162$$
$$\text{AC} = \sqrt{162}$$
$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{162}}{2} \quad \text{radio de la semi} \otimes$$

Así, el área del semicírculo es:

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{162}}{2}\right)^2 = \frac{162\pi}{8} = \frac{81\pi}{4}$$

El área del Δ que se forma con la diagonal $\overline{\text{AC}}$, rectángulo en B e isósceles con a = 9 cm como la medida de los catetos es:

$$\text{A}_{\Delta\text{rect isósc}} = \frac{a \bullet a}{2} = \frac{9 \bullet 9}{2}\text{cm}^2 = \frac{81}{2}\text{cm}^2$$

Que se debe restar al área de la semi⊙.

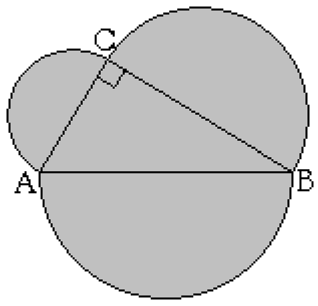
Así, el área pedida es:

$$\text{A} = \left(\frac{81\pi}{4} - \frac{81}{2}\right)\text{cm}^2 = \frac{81}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\text{cm}^2$$

El perímetro es el de una semi⊙ de radio $R = \frac{\sqrt{162}}{2} = \frac{\sqrt{81 \bullet 2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm., más dos lados del cuadrado de medida a = 9 cm. –cada uno, je,je.

$$\text{P} = \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} + 2a = \left(\frac{9\pi\sqrt{2}}{2} + 18\right)\ \text{cm}$$

5. ABC es un Δ rectángulo en C. $AC = 6\,cm$, $BC = 8\,cm$.
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ son diámetros de los semicírculos exteriores al ΔABC.



Solución:
Los números 6 y 8 de dos de los tres lados del ΔABC rect. en C forman, junto al valor 10, mayor que ellos, un trío fundamental.
Por lo tanto, la medida del tercer lado, el lado mayor –la hipotenusa c– son 10 cm.

Sabemos que el área del

$$A_{\Delta Rect} = \frac{ab}{2} = \frac{8 \bullet 6}{2}\,cm^2 = 24\,cm^2$$

Los radios equivalen a la mitad del diámetro, el cual coincide con el valor de cada lado del Δ. Es decir, los radios de cada semicircunferencia son, en cms.: 6/2, 8/2, 10/2.
O mejor: 3, 4 y 5 cm.
Luego.
La suma de las áreas de todos los semicírculos viene dada por:

$$A = \frac{\pi \bullet 3^2}{2} + \frac{\pi \bullet 4^2}{2} + \frac{\pi \bullet 5^2}{2} = \frac{\pi}{2}(9+16+25)$$
$$= 25\pi\,cm^2$$

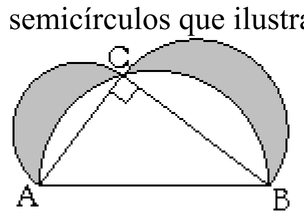
Lo que sumado al área del ΔABC rect en C, resulta el área pedida:

$$A = \left(24cm^2 + 25\pi\right)cm^2$$

El **perímetro** que encierra la región sombreada resulta de las tres semicircunferencias de radios 3, 4 y 5 cm. indicados anteriormente. Por lo tanto:

$$P = \frac{2\pi(3+4+5)}{2} = 12\pi \ \text{cm}$$

6. ABC es un Δ rectángulo en C. $BC = 16\,cm$, $AB = 20\,cm$.
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ son diámetros de los semicírculos que ilustra la figura.



Solución:
Sabemos que esta figura presentada como de mucho interés, es cuadrable. Basta y equivale a hallar el área del ΔABC, rectángulo en C. El cuál depende exclusivamente de los valores de los catetos.
Los números correspondientes a los lados conocidos del Δ, presentes en el enunciado resultan: de amplificar por **cuatro** al par de valores 4 y 5 del trío Pitagórico fundamental 3, 4 y 5.
El número faltante de ese trío por amplificar es 3, que tras amplificarlo resulta ser $3 \bullet 4 = 12$.
Luego, las medidas de los lados del ΔABC son:
$a = 12$ cm, $b = 16$ cm y $c = 20$ cm.

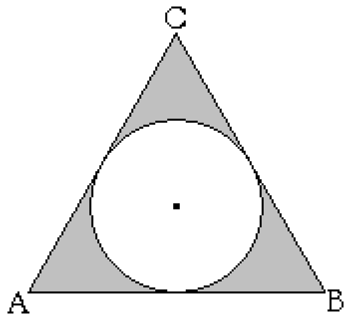
Y como el área del triángulo rectángulo es el semiproducto de los catetos –la mitad del producto de los dos lados menores.

$$A_{\Delta Rect} = \frac{ab}{2} = \frac{16 \bullet \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}}\,cm^2 = 72\,cm^2$$

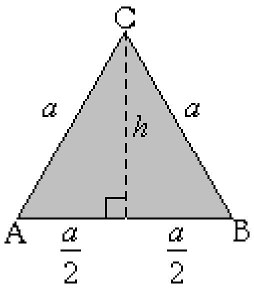
El **perímetro** de las regiones sombreadas está definido por el perímetro de los tres semicírculos:

$$P = \frac{\cancel{2}\pi\left(\frac{a}{\cancel{2}}\right) + \cancel{2}\pi\left(\frac{b}{\cancel{2}}\right) + \cancel{2}\pi\left(\frac{c}{\cancel{2}}\right)}{2}$$
$$= \frac{(a+b+c)\pi}{2} = \frac{(12+16+20)\pi}{2}\ \text{cm}$$
$$= 24\pi \ \text{cm}$$

7. El ΔABC es equilátero de lado a. Exprese el área y perímetro en función de a.



Solución:



La figura sombreada surge de la diferencia de áreas entre el triángulo equilátero ABC y el círculo interior.

El área del ΔABC viene dada por el semiproducto de su altura h y el lado AB = a sobre el cual la trazamos.

En todo Δ equilátero, la altura dimidia el lado sobre el cual se traza.

Pues bien, para conocer la medida h usamos teo. de Pitágoras en el ΔADC, rectángulo en D:

$$(\mathrm{AC})^2 = (\mathrm{AD})^2 + (\mathrm{DC})^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2 = \dfrac{a^2}{4} + h^2 \qquad / - \dfrac{a^2}{4} \\ a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4} = h^2 \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{array}}$$

Conocido el valor de h se puede determinar el área del ΔABC:

$$\mathrm{A}_\Delta = \frac{h \bullet \mathrm{AB}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \bullet a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad \left(\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}\right)$$

En todo Δ equilátero, la medida del radio r de la ⊙ **inscrita** con la medida de la altura del Δ está en la razón de 1 **:** 3. Es decir:

$$r = \frac{1}{3} \bullet h = \frac{1}{3} \bullet \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}_\otimes = \pi r^2 = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2\pi \bullet \cancel{3}}{6 \bullet_2 \cancel{6}} = \frac{a^2\pi}{12}$$

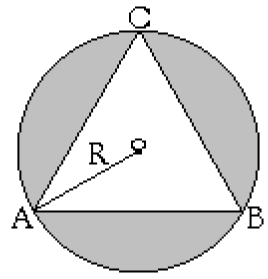
Entonces, **el área pedida es:**

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_\Delta - \mathrm{A}_\otimes = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\pi}{12} = \frac{a^2}{12}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$$

Y **el perímetro pedido** está determinado por el perímetro del Δ más el de la ⊙:

$$\mathrm{P} = 3a + 2\pi\, r = 3a + \cancel{2}\pi\frac{a\sqrt{3}}{\cancel{6}_3} = \left(3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)a$$

8. El ΔABC es equilátero. Exprese el área y perímetro de la región sombreada en función de R.



Solución:

La figura sombreada surge de la diferencia de áreas entre el círculo de radio R y el triángulo equilátero ABC, digamos, de lado a.

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_\otimes - \mathrm{A}_\Delta = \pi R^2 - \frac{a \bullet h}{2} \qquad (*)$$

$$R = \frac{2}{3} \bullet h \Rightarrow h = \frac{3\mathrm{R}}{2}$$ en toda ⊙ **circunscrita** (**)

Además, se halló en el ejerc. 7 y por teo. de Pitágoras, que:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{3\mathrm{R}}{\cancel{2}}\right) = \mathrm{R}\sqrt{3} \qquad (***)$$

Reemplazando (**) y (***) en (*):

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_\otimes - \mathrm{A}_\Delta = \pi R^2 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{R}\sqrt{3} \bullet \frac{3\mathrm{R}}{2}\right)$$

$$= \pi R^2 - \frac{3\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

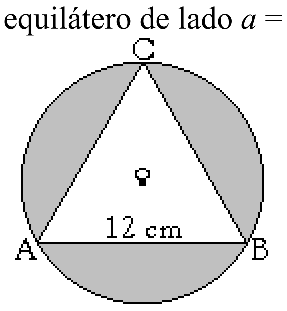
Y **el perímetro pedido** está determinado por el perímetro del Δ más el de la ⊙:

$$\mathrm{P} = 2\pi R + 3a$$

$$= 2\pi R + 3 \bullet R\sqrt{3}$$

$$= R\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$$

9. El ΔABC es equilátero de lado $a = 12\ cm$.



Solución:

$$A = A_{\otimes} - A_{\Delta} = \pi R^2 - \frac{a \bullet h}{2}$$

$$= \pi R^2 - \frac{{}^{6}\cancel{12} \bullet h}{\cancel{2}}$$

$$= \pi R^2 - 6h \qquad \text{en cm}^2 \quad (*)$$

Y en toda ⊙ **circunscrita:**

$$R = \frac{2}{3} \bullet h \qquad (**)$$

A su vez,

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 6\sqrt{3}\ \text{cm} \qquad (***)$$

Reemplazando (***) en (**) obtenemos:

$$R = \frac{2}{\cancel{3}} \bullet^{2} \cancel{6}\sqrt{3}\ \text{cm} = 4\sqrt{3}\ \text{cm} \qquad (****)$$

Reemplazando (***) y (****) en (*):

$$A = A_{\otimes} - A_{\Delta} = \pi\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 6\left(6\sqrt{3}\right) \quad \text{cm}^2$$

$$= 48\pi - 36\sqrt{3} \quad \text{cm}^2$$

$$= 6\left(8\pi - 6\sqrt{3}\right) \quad \text{cm}^2$$

Y **el perímetro pedido** es:

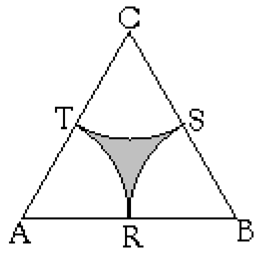
$$P = 2\pi R + 3a$$

$$= 2\pi\left(4\sqrt{3}\right) + 3 \bullet 12 \quad \text{cm}$$

$$= 8\pi\sqrt{3} + 36 \quad \text{cm}$$

$$= 4\left(2\pi\sqrt{3} + 9\right) \quad \text{cm}$$

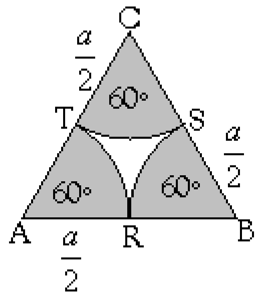
10. El ΔABC es equilátero y la medida de su lado es a. R, S y T son puntos de tangencia entre los sectores circulares.



Solución:

La figura sombreada surge de la diferencia de áreas entre el triángulo equilátero ABC y los tres sectores circulares con ángulo de 60º y radio $\frac{a}{2}$.

Primero hallaremos el área de la siguiente región sombreada.



Sea A el área de uno de aquellos sectores circulares y 3A el área de los tres sectores circulares a restar en total al Δ.

$$3A = 3 \bullet \frac{60^{\circ}\pi r^2}{360^{\circ}} = \cancel{3} \bullet \frac{\cancel{60^{\circ}}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\cancel{360^{\circ}}\ {}^{2}\cancel{6}}$$

$$= \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{2}$$

$$\text{Y usando } \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \Rightarrow \quad 3A = \frac{\pi a^2}{8}$$

La diferencia de áreas entre el triángulo equilátero, hallada en el ejercicio 7 y los tres sectores resulta ser:

$$A_{\text{pedida}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{8} = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$$

El perímetro de la figura del enunciado es el de tres sectores circulares, sin los lados del triángulo.

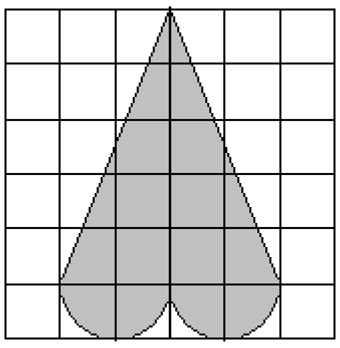
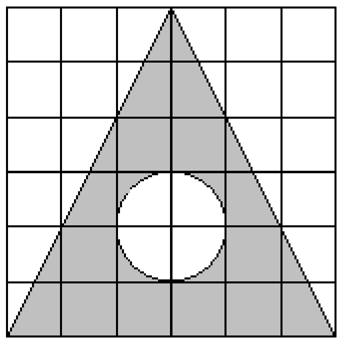
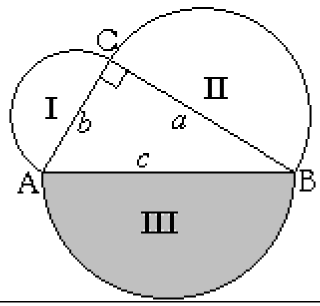
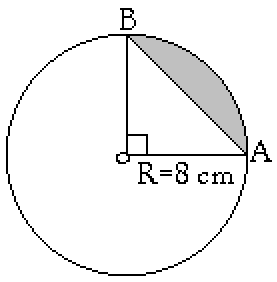
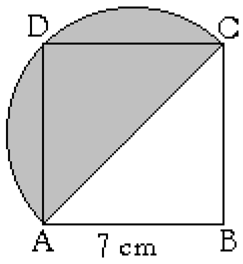
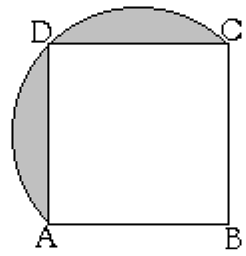
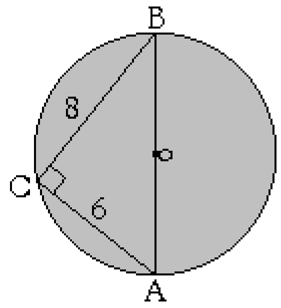
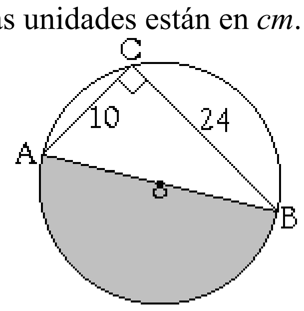
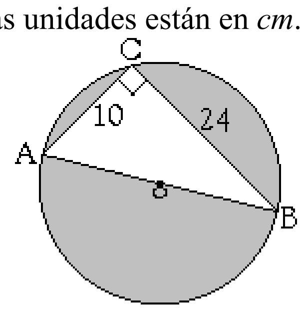
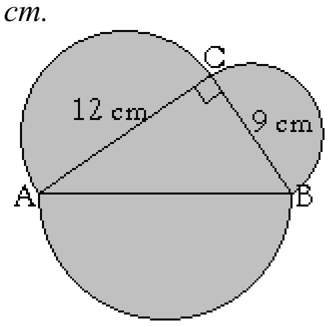
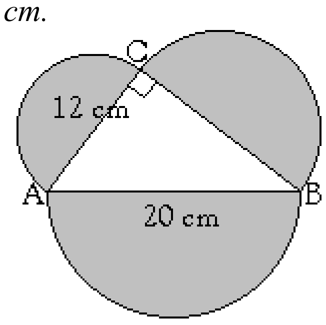
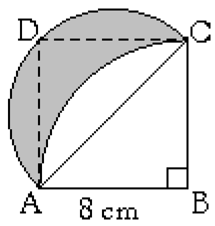
$$P = \cancel{3} \bullet \frac{\cancel{60^{\circ}} \bullet 2\pi r}{\cancel{360^{\circ}}\ {}^{2}\cancel{6}} = \frac{\cancel{2}\pi \bullet \frac{a}{\cancel{2}}}{2} = \frac{a\pi}{2}$$

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Círculos, Circunferencias: Áreas y Perímetros con Teorema de Pitágoras
Listado N° 7 de Ejercicios (Propuestos)

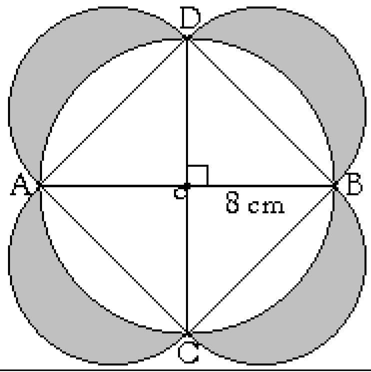
Nombre: ___________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Halle el área y perímetro de las siguientes figuras sombreadas:

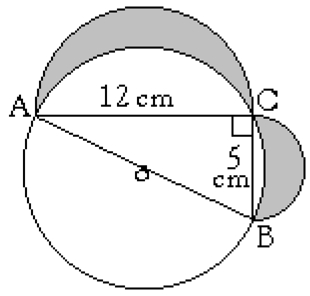
1. Considere cada cuadrado de 1 cm^2. 	**2.** Considere cada cuadrado de 1 cm^2. 	**3.** La regiónes I y II tienen las sgtes. áreas: $A_I = \frac{36\pi}{2} cm^2 = 18\pi\, cm^2$ $A_{II} = \frac{64\pi}{2} cm^2 = 32\pi\, cm^2$ 
4. o centro de la circunferencia. 	**5.** ABCD cuadrado de lado $a = 7$ *cm*. 	**6.** ABCD cuadrado. AB = 7 *cm*. 
7. $\overline{BC}$ diámetro de la circunferencia de centro o. Las unidades están en *cm*. 	**8.** $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o. Las unidades están en *cm*. 	**9.** $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o. Las unidades están en *cm*. 
10. ΔABC rectángulo en C, de catetos a = 9 cm y b = 12 *cm*. 	**11.** ΔABC rectángulo en C, de lados b = 12 cm y c = 20 *cm*. 	**12.** ABCD cuadrado de 8 *cm*. por lado. 

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

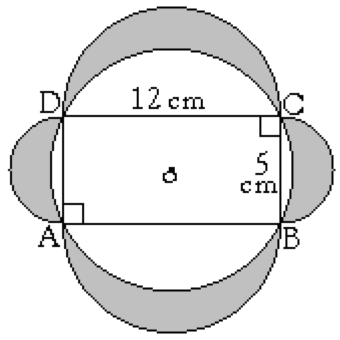
13. $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o.



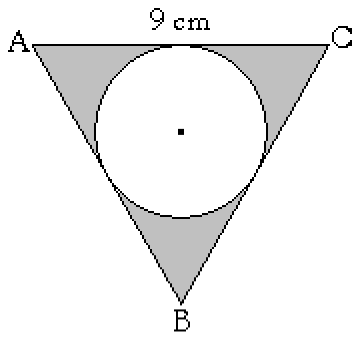
14. $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o.



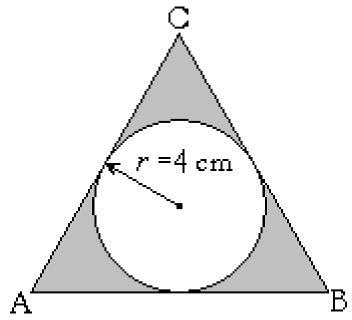
15. ABCD rectángulo inscrito en la circunferencia de centro o.



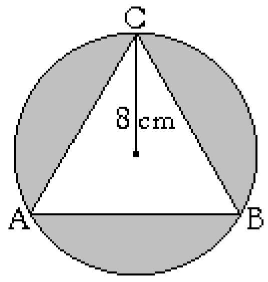
16. El ΔABC es equilátero de lado $a = 9$ *cm*.



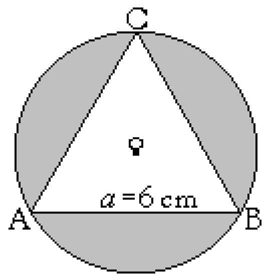
17. El ΔABC es equilátero. El radio de la circunferencia inscrita es $r = 4$ *cm*.



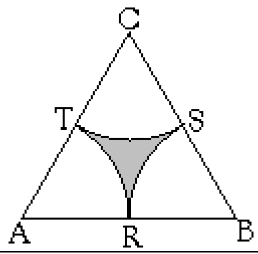
18. La circunferencia de radio $R = 8$ *cm* está circunscrita al ΔABC equilátero.



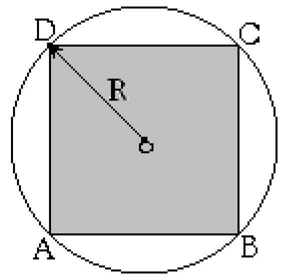
19. El ΔABC es equilátero de lado $a = 6$ *cm*.



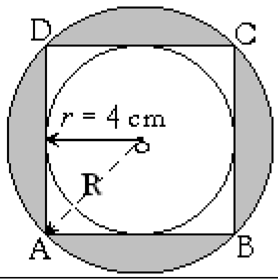
20. R, S y T puntos de tangencia entre los sectores circulares vecinos al interior del ΔABC es equilátero.
AB = 12 *cm*.



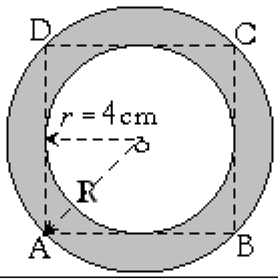
21. Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 25.12 *cm*.



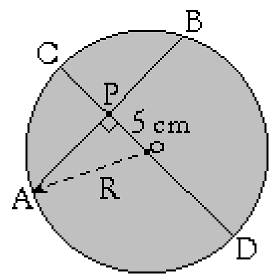
22. El cuadrado ABCD está inscrito en la circunferencia de radio R = $\overline{OA}$.
Y la circunferencia de radio $r = 4$ *cm*. se halla inscrita en el cuadrado.



23. El cuadrado ABCD está inscrito en la circunferencia de radio R = $\overline{OA}$.
Y la circunferencia de radio $r = 4$ *cm*. inscrita en el cuadrado.



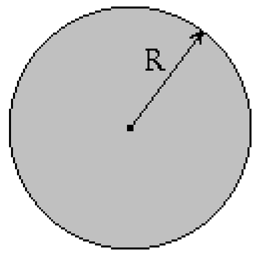
24. La cuerda $\overline{AB}$ mide 24 *cm*. Y se halla a una distancia de 5 *cm*. del centro o de la circunferencia.



Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

9. Guía de Autoaprendizaje nivel básico
Área y Perímetro de Círculos y Circunferencias (respectivamente)

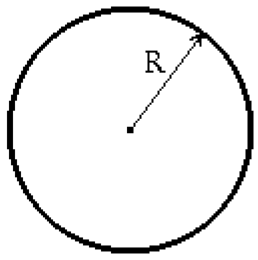
La siguiente guía no pretende ser un listado de ejercicios sin resolver, razón por la cuál encontrarás ejercicios resueltos, e inmediatamente y por cada uno de ellos, hallarás un ejercicio propuesto. Este último puede ser resuelto siguiendo como modelo el ejercicio anterior. Te invito a que los resuelvas en tu cuaderno.
Los ejercicios son de área y perímetros de circunferencia respectivamente. Antes es necesario que recuerdes que:
El área de una superficie encerrada por una circunferencia (desde ahora la denotaremos por ⊙) es:



Área ⊙ = πR^2; donde R es el radio de la circunferencia.
$\pi = 3{,}14$

No existen áreas de circunferencias, sino de círculos, que es la zona encerrada por la circunferencia.

Y ***el Perímetro*** (longitud de la circunferencia) viene dado por:
Perímetro ⊙ = $2\pi R$.



A partir de las fórmulas dadas, estás en condiciones de continuar con la siguiente guía.
Quiero señalar, que los dibujos no están hechos a escala, razón por la cual, si tomas una regla hallarás que las medidas de los radios pueden ser distintas a las indicadas en los ejercicios. Esto se debe a un asunto de edición e impresión. No te preocupes, los procedimientos para obtener los resultados son correctos y quizás, si te interesa, tú puedas hacer los dibujos a escala en tu cuaderno. No influye en nada en la resolución de ejercicios.

Observación: Calculadoras no son indispensables. Optativas si se prefiere.

Ejercicios Resueltos y Propuestos

1) Halle el área y perímetro de la ⊙ de radio 3 *cm*.
Solución:
La fórmula que debemos aprender son las indicadas arriba.
Veamos como se utilizan:

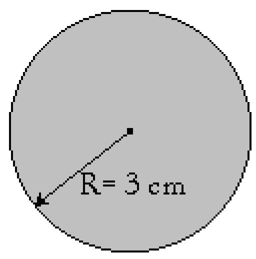


fig.3

a) Área ⊙ = πR^2 (I)
Reemplazamos en la fórmula el valor que nos dan para el radio en el enunciado del problema, este es R = 3 *cm*. Con lo cuál la fórmula nos queda de la siguiente manera:
Área ⊙ = $\pi(3\ cm)^2$ (II)
(Noten la entrada del valor 3 en la fórmula del área al reemplazar la "letra" R. Esto porque nos dicen que el radio R vale 3 *cm*.)

Recordemos que $3^2 = 9$, en **(II)**, nos queda:
Área ⊙ = $9\pi\ cm^2$

b) Para el Perímetro ocupamos la fórmula:
Perímetro ⊙ = $2\pi R$
Y ahora reemplazamos el valor R = 3 *cm*. Con lo cuál, la expresión anterior nos queda:
Perímetro ⊙ = $2\pi\ (3\ cm)$
= $6\pi\ cm$

2) Halle el área y perímetro de una ⊙ de radio R = 4 *cm*. (Propuesto).

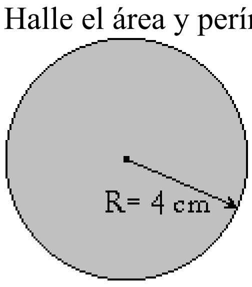


fig.4

3) Halle el área y perímetro de la semicircunferencia de radio 6 *cm*.

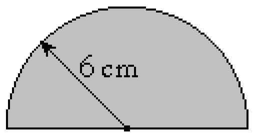


fig.5

<u>Solución</u>:
Tenemos la mitad de una circunferencia -llamado también semicircunferencia- de radio R = 6 *cm*.

a) <u>Área</u>: ¡Pero nosotros solo hemos vistos áreas de circunferencias! ¡Como hacemos para calcular áreas de mitades de circunferencias! ¡Simple!, calculamos el área de una circunferencia con R = 6 *cm*. A dicho resultado ¡lo dividimos por dos! Y tenemos el área de la mitad de una circunferencia de radio 6 *cm*. ¿Era muy difícil?, no ¿no es cierto?, veamos lo simple que es:

   Área ⊙ = πR^2

   Como R = 6 *cm*, reemplazamos en la fórmula, obteniéndose:

   Área ⊙ = $\pi\,(6\text{ cm})^2 = 36\pi\ cm^2$

   Y la mitad del área es: $\dfrac{36\pi}{2}\ cm = 18\pi\ cm^2$ Que es el área solicitada.

b) En el caso del perímetro, tenemos que la semicircunferencia es la suma del perímetro de las figuras 6 y 7 que se presentan abajo por separado. (Fíjese que si unimos estas figuras, obtenemos la del ejercicio enunciado, fig. 5)

   $P = 2\pi R/2 = \pi R$

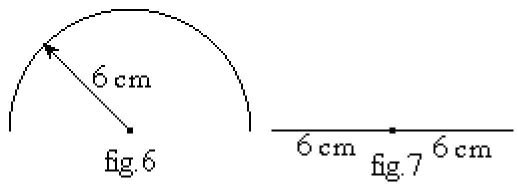


fig.6 fig.7

La fig.6 es una semi-circunferencia –o mitad de la circunferencia- de Radio = 6 *cm*.

Para hallar el perímetro de la fig.6: Obtenemos primero el perímetro de una ⊙ completa 6 *cm*. de radio y luego lo dividimos por dos. Así obtendríamos la medida para la mitad de una ⊙.

<u>Veamos</u>:
Sabemos que el perímetro de una circunferencia completa es:
$P = 2\pi R$
Pero la fig.6 es mitad de una ⊙, así que su perímetro se divide por la mitad, resultando:

$$\text{Perímetro semi ⊙} = \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} = \pi R \qquad \text{(donde se simplificó por 2).}$$

Si ahora reemplazamos arriba el valor del radio R por su medida de 6 *cm*. Obtenemos: Perímetro semi ⊙ = $6\pi\ cm$

¡También hay que considerar el trazo de línea recta (fig.7)! que une los dos extremos de la semi-circunferencia y que mide como se puede ver, dos veces el valor del Radio, esto es 12 *cm*.

Finalmente, el perímetro del ejercicio dado consiste en la suma de los perímetros de las fig.6 y fig.7 que hemos hallado por separado.

Perímetro fig.5 = Perímetro fig.6 + Perímetro fig.7

$= 6\pi\ cm + 12\ cm$

Que es el perímetro solicitado.

4) Esta vez, se le pide que halle el área y perímetro del cuadrante de ⊙ de radio $r = 2$ cm. Esto es, de un cuarto de ⊙ (Propuesto).

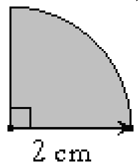


fig.8

5) Hallar el área y perímetro de la corona (parte achurada) si la ⊙ exterior (más grande) tiene un radio R de 8 cm y la ⊙ interior (mas chica), tiene un radio r de 3 cm.

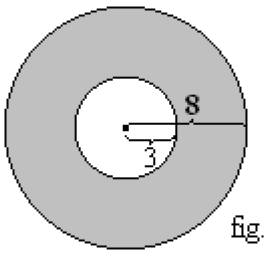


fig.9

Solución: Este ejercicio es muy imaginativo.

a) Área:

Se calcula el área de la ⊙ mas grande: Área ⊙grande = πR^2; con R = 8 cm

$= \pi(8\ cm)^2$

$= 64\pi\ cm^2$

Hasta aquí tenemos el área de la circunferencia.

Calculamos el área de la ⊙ mas pequeña: Área ⊙ pequeña = πr^2; $r = 3\ cm$

$= \pi(3\ cm)^2$

$= 9\pi\ cm^2$

Para comprender mejor el presente ejercicio, te invito a que mires al interior de tu mente, ya no con los ojos, sino con tu intelecto lo siguiente:

- Imagina la circunferencia grande completa y achurada (esto es, con líneas).
- Imagina la circunferencia pequeña completa toda de color blanco.
- Imagina la más pequeña como una goma de borrar que va borrando el espacio de donde se pone.
- Sitúa la circunferencia más pequeña al centro de la más grande. Como una goma de borrar, quita superficie o área a la más grande, dejando solo la corona achurada.

Fin del ejercicio imaginativo.

Espero que hayas visto que la figura dada resulta de restar el área (superficie) que ocupa la más pequeña, a la circunferencia más grande.

Esto, matemáticamente, es:

Área solicitada = Área circunferencia grande – Área circunferencia pequeña

$= 64\pi\ cm^2 - 9\pi\ cm^2$

$= 55\ \pi\ cm^2$

La figura dada tiene dos fronteras. Uno exterior, correspondiente a la circunferencia más grande y otro interno, correspondiente a la frontera con la circunferencia pequeña. Por lo que el perímetro dado por la frontera de la figura dada, es la suma de ambos perímetros.

Perímetro figura dada = Perímetro figura pequeña + perímetro figura grande
= $2\pi R$ grande + $2\pi r$ pequeña

Como R = 8 *cm* y $r = 3$ *cm*, reemplazamos:

Perímetro figura dada = $2\pi\,(8)$ *cm* + $2\pi\,(3)$ *cm*
= 16π *cm* + 6π *cm*

Desarrollamos la suma:

Perímetro figura dada = 22π *cm*

6) Halle el área y perímetro de la siguiente figura. Con R = 10 *cm* (radio de la ⊙ grande) y $r = 4$ *cm* (radio de la ⊙ pequeña) (Propuesto)

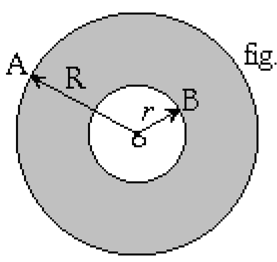


fig. 10

7) Halle el área y perímetro de la siguiente figura, con R = 8 *cm* y $r = 3$ *cm*.

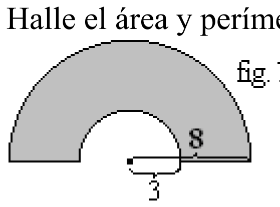


fig. 11

Solución:

a) Área: Dado que el área es la mitad de la hallada en la figura 9, ejercicio 5, se tiene:

Área = $\dfrac{55\pi}{2}\ cm^2 = 27,5\ \pi\ cm^2$.

b) Perímetro = mitad perímetro fig.9 + diámetro ⊙ grande – diámetro ⊙ pequeña (*)

Es claro fácil notar que la fig.11 tiene en parte la mitad del perímetro de la fig.9. Pero la fig.11, pero el de este ejercicio, tiene además trazos rectos que no tiene la fig.9. Esos trazos rectos son los diámetros de las ⊙s. El diámetro de la semi ⊙ pequeña ocupa parte del espacio donde se sitúa el diámetro de la semi ⊙grande. Por ello, es que el diámetro de la semi ⊙pequeña resta diámetro a la semi ⊙grande.

Como el perímetro de la fig.9 es: 22π cm. Su mitad es: 11π cm.

Y como el diámetro = dos veces radio. Tenemos:

\+ Diámetro ⊙ grande = 2 veces R = $2 \bullet 8$ *cm* = 16 *cm*
– <u>Diámetro ⊙ pequeña = 2 veces r = $2 \bullet 3$ *cm* = 6 *cm*.</u>
16 *cm*. – 6 *cm*. = 10 *cm*

Reemplazamos estos valores en la expresión (*), *como sigue:*

Perímetro = mitad perímetro fig.9 + (diámetro ⊙ grande – diámetro ⊙ pequeña)

Perímetro = 11π *cm* + (16 *cm* – 6 *cm*.) (con los reemplazos de valores efectuados)
= 11π *cm* + 10 *cm*.
= $(11\pi + 10)$ *cm*.

Como se puede ver. Conviene calcular áreas y perímetros para circunferencias completas y luego determinar áreas y perímetros para partes de ella.

8) Halle el área y perímetro de la siguiente figura. Con R = 10 *cm* y $r = 4$ *cm*. (Propuesto).

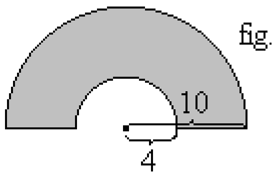


fig.12

9) Hallar el área y perímetro de la siguiente figura. Cada circunferencia interior tiene un radio *r* de 5 *cm*. Es decir, son iguales.

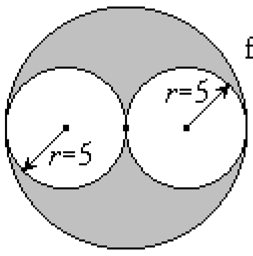


fig. 13

<u>Solución</u>:
Claramente hay que restar las áreas de las dos ⊙s menores, a la ⊙ mayor. Pero para esto debemos tener el área de todas, con el conocimiento de sus respectivos radios.
Note que **el diámetro** de cualquiera de las circunferencias interiores es igual al **radio** de la circunferencia más grande. Por lo tanto, si R es el radio de la mayor de las circunferencias, entonces:

R = 2 veces radio de alguna circunferencia interior.
= 2 • 5 *cm*
=10 *cm*. Es el valor del radio R de la circunferencia más grande.

a) Área figura dada = Área ⊙ grande – área $1^{\underline{era}}$ ⊙ interior – área $2^{\underline{da}}$ ⊙ interior.

$$
\begin{aligned}
&= \pi(10\ cm)^2 - \pi(5\ cm)^2 - \pi(5\ cm)^2\\
&= \pi\, 100\ cm^2 - \pi\, 25\ cm^2 - \pi\, 25\ cm^2\\
&= 100\,\pi\ cm^2 - 25\,\pi\ cm^2 - 25\,\pi\ cm^2\\
&= (100 - 25 - 25)\,\pi\ cm^2\\
&= 50\,\pi\ cm^2
\end{aligned}
$$

b) El perímetro de la siguiente figura viene dado por los tres límites o fronteras de su región. Por lo tanto, tengo tres perímetros a calcular para obtener mi primero.

Perímetro figura dada: $= 2\pi R$ grande $+\ 2\pi r$ interior $+\ 2\pi r$ interior

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi\,(10\ cm) + 2\pi\,(5\ cm) + 2\pi\,(5\ cm)\\
&= 20\pi\ cm + 10\pi\ cm + 10\pi\ cm\\
&= 40\pi\ cm
\end{aligned}
$$

10) Hallar el área y perímetro de la siguiente figura. Con radio $r = 7$ *cm*, cada circunferencia interior. (Propuesto)

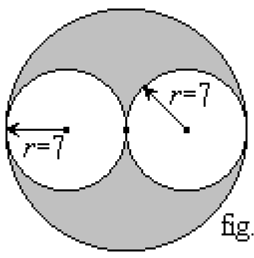


fig.14

.

11) Hallar el área y perímetro de: (Propuesto)

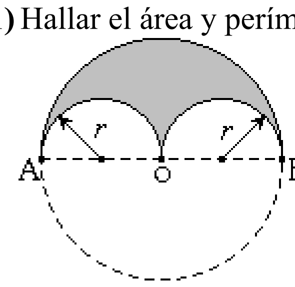


fig.15

Con radio $r = 7$ *cm*. en cada circunferencia interior y $\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia de centro o.
Hint: aproveche el área y perímetro del ejercicio anterior.

12) Halle el área y perímetro de la siguiente figura:

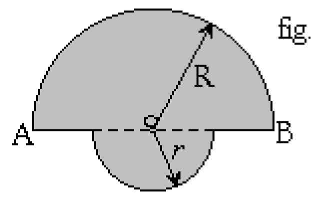


fig.16

$\overline{AB}$ diámetro de la semicircunferencia de centro o. La semi-circunferencia grande tiene un radio R = 6 *cm* y la pequeña tiene un radio $r = 2$ *cm*.

<u>Solución</u>:

a) Área: Notemos al área de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se le ha agregado una semi-circunferencia más pequeña. Como se ha agregado área, deberemos en esta oportunidad, sumar áreas. (En los ejercicios anteriores se restaba superficie, por lo que había que restar del área más grande, otra área más pequeña).

Como en este ejercicio agregamos superficie, tenemos:
Área pedida = área semi-circunferencia grande + área semi-circunferencia pequeña.

$$= \frac{1}{2} \text{ área circunferencia grande } + \frac{1}{2} \text{ área circunferencia pequeña}$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

Reemplazamos los valore de los radios R = 6 *cm* y $r = 2$ *cm*. y obtenemos:

$$= \frac{1}{2}\pi\,(6\ cm)^2 + \frac{1}{2}\pi\,(2\ cm)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,36\,\pi\,cm^2 + \frac{1}{2}\,4\,\pi cm^2$$

Simplificando cada término por 2 (o dividiendo cada numerador por su denominador), se obtiene:

$$= 18\,\pi\,cm^2 + 2\,\pi\,cm^2$$

$$= 20\,\pi\,cm^2$$

b) Perímetro: Note que los trazos rectos de la figura vienen a ser el diámetro de la circunferencia grande menos el diámetro de la circunferencia pequeña. Esto porque en la circunferencia pequeña, el diámetro de esta no es parte del límite o frontera de la figura. Por lo tanto:

Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

Perímetro = mitad perímetro ⊙ grande + mitad perímetro ⊙ pequeña + diámetro ⊙ grande – diámetro ⊙ pequeña (**)

Para seguir avanzando en la obtención del perímetro debemos hallar todos los valores de la expresión (**).

Mitad perímetro ⊙ grande = $\frac{1}{2}\,2\pi R$; con R = 6 *cm*

$= \frac{1}{2}\,2\pi\,6\ cm$ (hemos simplificado por 2)

$= 6\pi\ cm$

Análogamente,...

Mitad perímetro ⊙ pequeña = $\frac{1}{2}\,2\pi r$; con $r = 3$ *cm*

$= \frac{1}{2}\,2\pi\,3\ cm$ (hemos simplificado por 2)

$= 3\pi\ cm$

<u>Veamos la resta de diámetros</u>:

Como el diámetro = 2 veces el Radio:

Diámetro ⊙ grande – diámetro ⊙ pequeña = $2 \bullet R - 2 \bullet r$

Diámetro ⊙ grande – diámetro ⊙ pequeña = $2 \bullet 6\ cm - 2 \bullet 3\ cm$

$= 12\ cm - 6\ cm = 6\ cm$

Finalmente hemos hallado todos los valores correspondientes al perímetro de la figura dada y los reemplazamos en (**)

Perímetro = $6\pi\ cm + 3\pi\ cm + 6\ cm$

$= 9\pi\ cm + 6\ cm$

$= (9\pi + 6)\ cm$

13) De manera (o similar) hallar el área y perímetro de la siguiente figura. $\overline{AB}$ diámetro de la semicircunferencia de centro o. Con R = 10 *cm* y $r = 4$ *cm*.

(Propuesto)

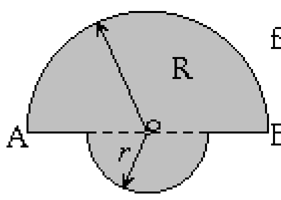


fig. 17

14) $\overline{AB}$ diámetro de la semicircunferencia mayor de centro o.

Con R = 10 *cm* y $r = 5$ *cm*. (Propuesto)

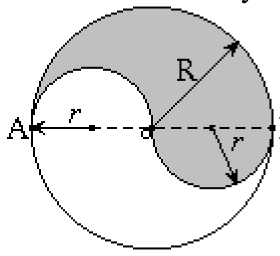


fig. 18

<u>Solución</u>:

Área: Debemos notar que si distribuimos las áreas sombreadas en torno al diámetro, obtenemos exactamente medio círculo de radio R = 10 cm.

Así que, la medida del área es: $A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi 10^2}{2}$ cm $= \frac{100\pi}{2}$ cm $= 50\pi$ cm

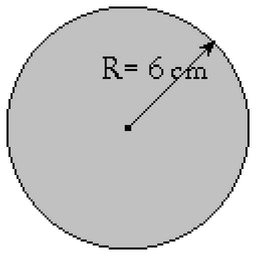
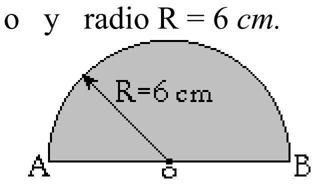
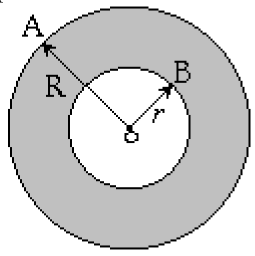
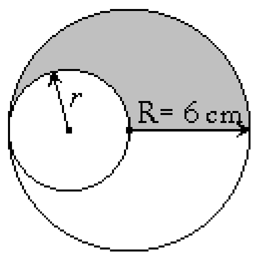
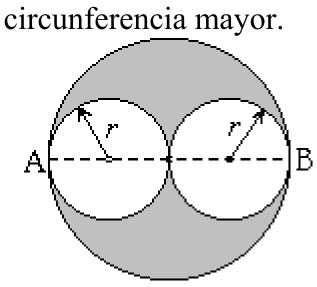
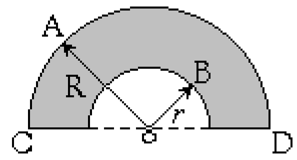
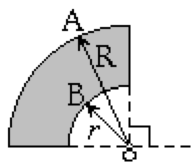
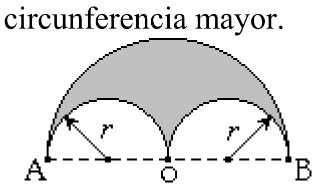
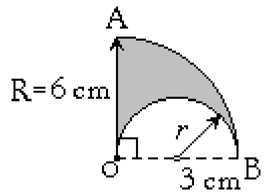
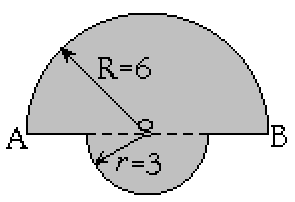
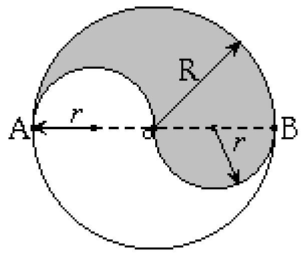
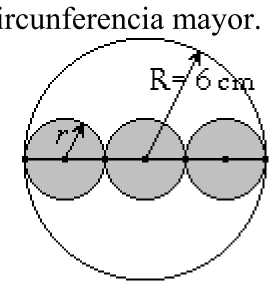
El perímetro es media ⊙ de radio R = 10 cm y dos semi⊙ de radios $r = 5$ cm.

$P = \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} + 2\left(\frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}}\right) = \pi \bullet 10$ cm $+ 2 \bullet \pi \bullet 5$cm $= 20\pi$ cm

Círculos y Circunferencias: Áreas y Perímetros
Listado N° 8 de Ejercicios (Propuestos) nivel básico

Nombre: ___________________________________ Curso: ______ Puntaje: ____

Halle el área y perímetro de las siguientes figuras sombreadas:

1. Circunferencia de radio R = 6 *cm*.  	**2.** Semicircunferencia de centro o y radio R = 6 *cm*.  	**3.** R = 6 *cm*. *r* = 3 *cm*. Son los radios de las ⊙s concéntricas (comparten el mismo centro) respectivas. 
4. o es centro de la circunferencia más grande. La medida de su radio R es 6 *cm*.  	**5.** Las circunferencias interiores de radio *r* = 3 *cm*. son tangentes en el centro de la circunferencia mayor.  	**6.** $\overline{CD}$ diámetro de la mayor de las semicircunferencias concéntricas. OA = R = 6 *cm*. y OB = *r* = 3 *cm*. son los radios de las semi ⊙s. 
7. OA = R = 6 *cm*. y OB = *r* = 3 *cm*.  	**8.** Las circunferencias interiores de radio *r* = 3 *cm* son tangentes en el centro o de la circunferencia mayor.  	**9.** *r* = 3 *cm*. 
10. O centro de ambas semicircunferencias. R = 6 *cm*. *r* = 3 *cm*.  	**11.** O centro de ambas semicircunferencias. R = 6 *cm*. *r* = 3 *cm*.  	**12.** Las circunferencias interiores son tangentes entre sí y todas de radio *r*. R radio de la circunferencia mayor.  ¿Qué puedes señalar, al comparar con el perímetro del ejercicio anterior?

10. BIBLIOGRAFIA

1. Prueba de Selección Universitaria Matemáticas. 2da. Edición, Marzo 2003.
Ediciones Universidad Católica de Chile, Vicerrectoría de Comunicaciones y Extensión.
Autores: Oscar Tapia, Miguel Ormazábal Díaz-Muñoz, Jorge Olivares Sepúlveda, David López González.

2. Descubrimiento las Matemáticas. 4ta Edición, Marzo 1990.
Editorial Salesiana.
Autores: Paulina Aguayo, Isabel Alonso de la Presa.

3. Matemática 2º Medio. 2da Edición. 2008.
Ediciones Cal y Canto.
Autor: Eduardo Cid Figueroa.

4. Matemática 2º Medio. 2da Edición, Noviembre 2003.
Editorial Mare Nostrum Ltda.
Autores: Patricio González González, Jorge Soto Andrade.

5. Matemática 2º Año Medio. Texto del estudiante. 1era Edición 2001.
McGraw-Hill/Interamerica de Chile Ltda.
Autores: Norma Hott Vásquez, Andrea Rubio Abarca, Luz Santana Salazar, Lucila Tapia Araya.

6. Test de Matemática (3.432 problemas). 29 ava Edición. Marzo de 1992.
Editorial Universitaria.
Autor: Carlos Mercado Schuller.

7. Theory and Problems of Plane Geometry with Coordinate Geometry. Año 1970.
Libros McGraw-Hill de México.
Autor: Barnett Rich.